Math. U.
113
1,1

Math. u. 113 - 1,1

<36601378630014

<36601378630014

Bayer. Staatsbibliothek

Math Un 113

Mathesis. System: et meth: ord: chronol: 144.

R

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Der erste Cursus der reinen Mathematik.

Von

Johann Friedrich Lorenz
Conventual am Stift und Closter Berge bey Magdeburg, und Oberlehrer am Pädagogio daselbst.

Helmstädt
bey Carl Gottfried Fleckeisen.
1791.

Grundriß
der
reinen und angewandten
Mathematik
oder
der erste Cursus
der
gesamten Mathematik.

Von

Johann Friedrich Lorenz
Conventual am Stift und Closter Berge bey Magdeburg,
und Oberlehrer am Pädagogio daselbst.

Erster Theil.
Die reine Mathematik.

Helmstädt
bey Carl Gottfried Fleckeisen.
1791.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Einleitung.

Eintheilung der Mathematik.

I.

Die Mathematik ist die Wissenschaft von der Größe, oder lehrt die Eigenschaften der Größe, und zieht daraus Regeln, die Größe in allen Fällen deutlich zu erkennen, und genau zu bestimmen, das ist, sie auszumessen.

Anmerk. Die Physik oder Naturlehre untersucht alle Eigenschaften der Körper, als Ausdehnung, Gestalt, Undurchdringlichkeit, Dichtigkeit, Bewegbarkeit, Schwere u. s. w. bey denen Vieles auf das Mehrere und Mindere, das ist, auf die Größe ankömmt, ohne welche die Erkenntniß solcher Eigenschaften oft nur mangelhaft und höchst unzureichend ist. Die Mathematik oder Größenlehre betrachtet an den Körpern die Größe allein, ohne ihre übrigen Eigenschaften in Betracht zu ziehen, und giebt Anweisung, von der Größe in allen Fällen eine deutliche Erkenntniß und genaue Bestimmung zu erlangen. Hiedurch leistet sie nicht nur der Naturlehre unentbehrliche Dienste, sondern wird auch im gemeinen Leben nützlich und nöthig, wo es uns gar oft um Bestimmung der Größe zu thun ist. Beyde Lehren begnügen sich nicht mit einer blos historischen Erkenntniß, sondern gewähren eine wissenschaftliche Einsicht, oder Erkenntniß nach Gründen. Und besonders hierin zeichnet sich die Mathematik vor allen andern Wissenschaften dergestalt aus, daß ohne genauere Kennt-

niß ihrer Methode Niemand einen vollständigen Begriff von Evidenz erlangen kann.

2.

Die Mathematik wird I. in Absicht auf ihren Gegenstand oder Inhalt in die Arithmetik und Geometrie eingetheilt; denen man noch die Trigonometrie als einen dritten Theil beyzufügen pflegt.

3.

Die Arithmetik betrachtet die Größe als abgesondert, quantitas discreta, als eine bloße Menge, die aus Theilen besteht, welche in beliebiger Verbindung seyn können; und handelt von den Zahlen, oder den Größen überhaupt.

4.

Die Geometrie betrachtet die Größe als stetig, quantitas continua, als ein aus zusammenhangenden Theilen bestehendes Ganzes, so daß da, wo ein Theil aufhört, der andere anfängt; und handelt von der Ausdehnung oder den ausgedehnten Größen. Sie wird in die Planimetrie und Stereometrie eingetheilt. Jene, oder die ebene Geometrie, schränkt alle ihre Untersuchungen auf einerley Ebene ein; diese, oder die körperliche Geometrie, betrachtet zugleich zwey oder mehrere Ebenen, selbst auch gebogene Flächen.

5.

Die Trigonometrie behandelt die stetige Größe arithmetisch, und lehrt insbesondere die Seiten und Winkel eines Triangels berechnen. Sie wird in die ebene und sphärische eingetheilt. Jene, trigonometria plana, ist für ebene geradlinichte Triangel; diese, trigonometria sphaerica, ist für solche Triangel, die man auf der Oberfläche einer Kugel mit Kreisbögen aus dem Mittelpunkte der Kugel beschreibt.

6.

6.

Beyde Arten der Trigonometrie machen keinen besondern Theil der Mathematik aus, sondern gehören, weil sie sich mit ausgedehnten Größen, und namentlich mit Triangeln, beschäftigen, offenbar zur Geometrie; und zwar die erste zur Planimetrie, die zweyte zur Stereometrie.

7.

Die Mathematik wird II. in Absicht auf Methode in die synthetische und analytische Mathematik eingetheilt.

8.

Die Synthesis macht den Anfang mit dem Allgemeinen und Einfachen, und schreitet in einer ununterbrochenen Verbindung immer weiter zu dem Besondern und Zusammengesetztern fort. Die Griechen sind hierin unsre Muster.

9.

Die Analysis nimmt das Unbekannte als bekannt an, verbindet es mit bekannten Größen in Gleichungen, und entwickelt es daraus. Die Griechen brauchten auch die Analysis, welche aber von den neuern Mathematikern eine veränderte Gestalt und große Erweiterung erhalten hat. Die Anweisung hiezu besteht in dem Literalcalculus, und der Algebra.

10.

Der Literalcalculus, oder die Buchstabenrechnung, die allgemeine Arithmetik, die algebraische Rechnung, betrachtet alle Größen als Zahlen, und bezeichnet die Zahlen durch allgemeine Zeichen, nämlich durch Buchstaben.

11.

Die Algebra bringt alle Fragen in Gleichungen, untersucht die Natur und Beschaffenheit derselben, und leitet daraus Regeln her, die unbekannte Größe zu entwickeln, das ist, die Gleichung aufzulösen.

12.

So lange die Analysis sich mit Größen beschäftigt, die wirklich angegeben werden können, heißt sie die Analysis des Endlichen, analysis finitorum. Betrachtet sie aber Größen, die so klein, oder so groß sind, daß sie sich gar nicht angeben lassen: so heißt sie die Analysis des Unendlichen, analysis infinitorum, oder die Infinitesimalrechnung, calculus infinitesimalis; und besteht aus der Differential- und Integralrechnung, calculus differentialis et integralis. Erstere lehrt, aus Vergleichung endlicher Größen die Vergleichung ihrer unendlich kleinen Theile zu finden; und letztere, aus Vergleichung der unendlich kleinen Theile die endlichen Größen selbst darzustellen.

13.

Alle diese zur Analysis gehörige Wissenschaften sind keine besondern Theile der Mathematik, sondern gehören theils zur Arithmetik, in so fern sie Größen überhaupt betreffen; theils zur Geometrie, in so fern sie auf ausgedehnte Größen angewendet werden.

14.

Die Mathematik wird III. in Absicht auf den Umfang ihrer Untersuchungen in die niedere und höhere eingetheilt. Die niedere Mathematik, mathesis elementaris, ist durch den Gang, den sie nimmt, in gewisse Gränzen eingeschränkt, die sie nicht zu überschreiten vermag; die höhere Mathematik, mathesis sublimior, braucht besondere Kunstgriffe und Methoden, die ihr die Analysis gewährt, die Gränzen der Untersuchungen um ein Großes zu erweitern. Dieser Unterschied geht auf beyde Theile der Mathematik, auf die Arithmetik sowohl, als auf die Geometrie.

15.

Die niedere Arithmetik lehrt die gemeineren, einfacheren, und specielleren, die höhere Arithmetik aber die

höheren,

höheren, zusammengesetzteren, und allgemeineren Rechnungen. Die niedere Geometrie schränkt sich blos auf die gerade Linie und den Kreis ein; die höhere Geometrie aber begreift alle Arten von krummen Linien, und heißt daher auch Geometria curvarum.

16.

Die Mathematik wird auch noch IV. in Absicht auf Theorie und Anwendung in die reine oder theoretische, und in die gemischte oder angewandte Mathematik eingetheilt.

17.

Die reine oder abstracte Mathematik, mathesis pura, seu theoretica, ist die eigentliche Mathematik selbst, wie sie im Vorigen beschrieben worden, welche die Größe an sich betrachtet, ohne auf die anderweitigen Eigenschaften der Dinge zu sehen, an denen sich die Größe befindet.

18.

Die gemischte oder angewandte Mathematik, mathesis mixta seu applicata, wendet die reine Mathematik, das ist, die Arithmetik und Geometrie, auf besondre Gegenstände an, von deren anderweitigen Eigenschaften sie auch eine oder die andere zugleich mit in Betracht zieht. Da solche Gegenstände und deren Eigenschaften zu dem Gebiete der Physik gehören, und nur zu mathematischen Untersuchungen ausgehoben werden; so nennt man diese physisch-mathematische Wissenschaften, doctrinae physico-mathematicae, welche die sogenannte gemischte oder angewandte Mathematik ausmachen, und füglich unter vier Classen gebracht werden können:

1. Die dynamischen oder mechanischen Wissenschaften, von den Kräften der Körper.
2. Die optischen Wissenschaften, von den Erscheinungen, die das Licht gewährt.
3. Die astronomischen Wissenschaften, von den Körpern des Weltgebäudes.

4. Die technischen Wissenschaften, von einigen der vorzüglichsten Künste.

19.

I. Die mechanischen Wissenschaften handeln von den Kräften der Körper, die, wenn sie sich entgegen wirken, einander entweder ganz, oder zum Theil aufheben; da dann im ersten Falle das Gleichgewicht, im zweyten die Bewegung entsteht.

20.

Der erste Theil der mechanischen Wissenschaften handelt vom Gleichgewichte, und zwar

1. in der Statik, vom Gleichgewichte überhaupt, besonders bey festen Körpern.

2. in der Hydrostatik, vom Gleichgewichte flüßiger unelastischer Körper.

3. in der Aërostatik, oder Aërometrie, vom Gleichgewichte flüßiger elastischer Körper.

21.

Der zweyte Theil der mechanischen Wissenschaften handelt von der Bewegung, und zwar

1. in der Mechanik, von der Bewegung überhaupt, besonders bey festen Körpern.

2. in der Hydraulik, von der Bewegung flüßiger Körper.

22.

II. Die optischen Wissenschaften handeln vom Lichte und den Gesetzen des Sehens, welches entweder mit bloßen Augen, oder durch geschliffene Gläser, oder vermittelst der Spiegel geschieht. Daher entstehen die drey Theile der optischen Wissenschaften: die Optik, Dioptrik, Catoptrik.

23.

Die Optik handelt von den allgemeinen Gesetzen des Sehens, und betrachtet die Lichtstrahlen, als kämen sie von den Gegenständen in geraden Linien in unser Auge; kurz, handelt von geraden Lichtstrahlen.

24.

24.

Eine besondere Anwendung der Optik ist die Perspectiv, welche lehrt, die Gegenstände auf einer Fläche so abzubilden, daß die Gemählde eben die Wirkung, als die Gegenstände selbst, im Auge machen.

25.

Die Dioptrik handelt von den Erscheinungen durch geschliffene Gläser, und überhaupt von Lichtstrahlen, die, wenn sie aus einer durchsichtigen Masse in eine andere von mehrerer oder minderer Dichtigkeit übergehen, von ihrer Richtung abgeleitet, das ist, gebrochen werden; kurz, handelt von gebrochenen Lichtstrahlen.

Anmerk. Diese Wissenschaft giebt uns Aufschlüsse über den Bau und die Einrichtung unserer Augen, und über die Beschaffenheit der Augengläser, Vergrößerungsgläser, und dioptrischen Fernröhren.

26.

Die Catoptrik handelt von den Erscheinungen durch Spiegel, und überhaupt von Lichtstrahlen, die, indem sie auf die glatte und polirte Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers fallen, nach einem bestimmten Gesetze davon zurückprallen, das ist, reflectirt werden; kurz, handelt von reflectirten Lichtstrahlen.

Anmerk. Diese Wissenschaft untersucht die Wirkungen verschiedner Arten von Spiegeln, und die Werkzeuge, die aus Spiegeln und geschliffenen Gläsern zusammengesetzt werden.

27.

III. Die astronomischen Wissenschaften handeln von den Körpern des Weltgebäudes, und der davon abhängenden Ausmessung des Raums und der Zeit auf unserer Erde. Sie enthalten die Astronomie, Geographie, Chronologie, und Gnomonik.

28.

Die Astronomie betrachtet die Lage, Entfernung, Figur, Größe und Bewegung der Körper im Weltgebäude;

und wird in die sphärische und theorische eingetheilt. Jene betrachtet die Weltkörper, so wie sie unsern Augen erscheinen; diese erforscht, wie die Weltkörper beschaffen seyn müssen, daß sie solche Erscheinungen hervorbringen können.

Anmerk. Diese Untersuchungen, welche von der Größe und Weisheit des Schöpfers würdige Begriffe in uns erwecken, und uns zu seiner Anbetung hinreißen, setzen die optischen und dynamischen Wissenschaften, und überhaupt alle im Vorhergehenden vorgetragenen mathematischen Kenntnisse voraus, welche sich in der Astronomie gleichsam concentriren.

29.

Die Geographie betrachtet insbesondere unsre Erdkugel nach ihrer Gestalt, Größe und Lage im Weltraume, und der hievon abhangenden Eintheilung und Abmessung ihrer Oberfläche.

30.

Die Chronologie lehrt die Zeit auf unserer Erdkugel nach den Bewegungen der Weltkörper in großen und kleinen Abschnitten bestimmen.

31.

Die Gnomonik lehrt die kleinen Abtheilungen der Zeit nach der Lage des Schattens bestimmen, den ein dunkler, besonders von der Sonne erleuchteter Körper auf eine Fläche wirft.

32.

IV. Die technischen Wissenschaften enthalten die Anwendung der Mathematik auf verschiedne erhebliche Künste; von denen blos die Baukunst, oder Architectur; die Geschützkunst, oder Artillerie; und die Befestigungskunst, oder Fortification in den Lehrbüchern der gesamten Mathematik, und zwar nur als ein Anhang, vorzukommen pflegen.

Kunst-

Kunstwörter der mathematischen Lehrart.

33.

Eine Erklärung, definitio, ist die Anzeige des bestimmten Begriffs, welcher unveränderlich mit einem Worte verknüpft wird.

Anmerk. Es ist erlaubt, einen beliebigen Begriff mit einem Worte zu verknüpfen, wenn dies nur unveränderlich geschieht, und solcher Begriff nichts Unmögliches enthält: daher Euklides und seine Nachfolger immer die Möglichkeit ihrer Begriffe sorgfältig zeigen, und die Worte durchgängig in der einmal festgesetzten Bedeutung gebrauchen.

34.

Bestehen die Erklärungen in der Anzeige der Art, wie die Sache entstehen kann, woraus ihre Möglichkeit von selbst einleuchtet: so heißen sie Sacherklärungen, definitiones reales, seu geneticae; alle übrige nennt man Worterklärungen, nominales.

35.

Ein Satz, der blos behauptet, daß Etwas so sey oder nicht sey, heißt ein Grundsatz, axioma, wenn seine Wahrheit sogleich erkannt wird, sobald man nur die Worte versteht; ein Lehrsatz, theorema, aber, wenn seine Wahrheit erst aus andern Wahrheiten hergeleitet werden muß.

36.

Ein Satz, der Etwas zu bewerkstelligen verlangt, heißt eine Foderung, postulatum, wenn die Art der Bewerkstelligung und deren Richtigkeit von selbst in die Augen fällt; eine Aufgabe, problema, aber, wenn die Art der Verrichtung gelehrt, und deren Richtigkeit dargethan werden muß.

37.

Ein Satz, der in einem andern Satze enthalten ist, oder daraus gefolgert werden kann, heißt ein Zusatz, corollarium.

Anmerk. Die Grundsätze machen mit den Zusätzen, welche aus Erklärungen gezogen werden, die Grundlehren einer Wissenschaft aus.

38.

Das, was einer Erklärung, einem Lehrsatze, einer Aufgabe, oder einem Zusatze, zur Erläuterung, Geschichte, Lehrvortrag, oder Anwendung beygefügt wird, heißt eine Anmerkung, scholion.

39.

Zuweilen wird ein Satz, der an sich in den Zusammenhang des Vortrags nicht gehört, in der Absicht eingeschoben, daß ein folgender Satz durch dessen Hülfe bewiesen werden könne, und heißt alsdenn ein Lehnsatz, lemma.

40.

Zu einem Lehrsatze gehört:

1. Der Satz selbst, der aus dem Angenommenen und der Aussage besteht.
2. Die Construction, oder Verzeichnung der Hülfslinien zur Führung des Beweises.
3. Der Beweis, der die Aussage aus dem Angenommenen herleitet.

41.

Zu einer Aufgabe gehört:

1. Die Frage selbst, die aus dem Gegebenen und dem Gesuchten besteht.
2. Die Auflösung, die das Gesuchte aus dem Gegebenen finden lehrt.
3. Der Beweis, der die Richtigkeit der Auflösung zeigt.

42.

Der Beweis, demonstratio, besteht in der augenscheinlichen Darstellung der Verbindung des zu beweisenden Satzes mit ungezweifelten Gründen, welche entweder für sich einleuchtend sind, als die Erklärungen, Grundsätze, und Foderungen, oder im Vorhergehenden bereits bewiesen worden sind.

43.

Der synthetische Beweis geht von den Gründen aus, und führt zur Conclusion fort.

44.

Der analytische Beweis geht von der Conclusion aus, und führt zu den Gründen zurück.

45.

Der apagogische Beweis geht von dem Gegentheil der Aussage aus, und führt bis zu einem Widerspruche mit dem Angenommenen, oder mit andern bereits erkannten Gründen.

46.

Die Induction beweist den Satz für alle einzelne Fälle, und schließt daraus auf die Allgemeinheit des Satzes.

47.

Die Umkehrung ist die Verwechselung des Angenommenen und der Aussage bey einem Lehrsatze; oder des Gegebenen und des Gesuchten bey einer Aufgabe.

48.

Nimmt man ohne Beweis an, daß Etwas so sey oder nicht sey: so heißt ein solcher Satz, wofern er nicht für sich einleuchtend ist, eine Hypothese.

Anmerk. Diesen Namen führt ein möglicher Fall, den man setzt, als das Angenommene bey einem Lehrsatze, oder das Gegebene bey einer Aufgabe; ferner das, was man zur Erklärung einer Erscheinung beliebig annimmt, um zu sehen, ob alles, was bey solcher Erscheinung vorkömmt, mit der angenommenen Erklärung übereinstimme, und daraus hergeleitet werden könne; desgleichen das, was man unter mehrern gleich richtigen Dingen willkührlich erwählt, welches daher füglich ein Wahlsatz heißen kann.

49.

Zur leichtern und schnellern Erlernung einer Wissenschaft könnte man, welches aber nur selten geschehen darf, einen Satz, auf welchen sehr vieles ankömmt, und dessen strenger Beweis schwer und verwickelt ist, auch noch an-

dern

dere Kenntniß voraussetzt, vorerst ohne Beweis, oder nach einer unzureichenden Bestätigung für wahr annehmen, bis man in der Zukunft die gelassene Lücke ausfüllen könne. Ein solcher Satz gehört für uns, so lange wir seinen völligen Beweis noch nicht einsehen, gleichfalls zu den Hypothesen.

50.

Zu den unzureichenden Beweisen, wenn ein Beweis aus Gründen, a priori, möglich ist, gehören die Erfahrungen, oder Beweise a posteriori. Diese werden in Beobachtungen und Versuche eingetheilt, und dienen den erwiesenen Sätzen zu Beyspielen und Proben. Allemal sind sie von großem Nutzen; in manchen Fällen aber unentbehrlich, und ohne sie keine Erkenntniß möglich, da sie denn sogar zu den Grundsätzen mit gehören.

Endzweck und Einrichtung des folgenden Grundrisses.

51.

Dem beträchtlichern Theile derjenigen, welche Mathematik zu erlernen wünschen, ohne sich darin weit ausbreiten, oder gar sie nach ihrem ganzen Umfange studiren zu wollen, genügen ihre ersten und unentbehrlichsten Wahrheiten; nicht in der Absicht, einen blos handwerkmäßigen Gebrauch davon zu machen, sondern theils ihren Verstand dadurch zu üben, und ihn für andre Wissenschaften, oder für die Geschäfte ihres Standes zu schärfen; theils die erlangten Kenntnisse auf Physik und Vorfälle des gemeinen Lebens gründlich anzuwenden.

52.

Ein Lehrbuch für diese Endzwecke müßte also die hiezu gehörigen Lehren aus der gesamten Mathematik ausheben; aus solchen ein Ganzes, das auf den wenigsten Principien beruhete, bilden; allen Hülfsmitteln, die sich auf erweiterte Kenntnisse gründen, gänzlich entsagen; und

dennoch

dennoch die Gesetze der ächten Methode treulich befolgen, wenigstens sie auf keine Art verletzen.

53.

Faßt ein Lehrbuch die nothwendigsten Elemente nach obigem Maaßstabe in sich: so wird es zugleich denen, welche weitere Fortschritte in der Wissenschaft machen wollen, wichtige Dienste leisten können. Denn obgleich ausgemacht ist, daß für diese zweyte Classe der Lehrlinge, wenn man die Vortheile des Literalcalculs gleich Anfangs zu Hülfe nehmen wollte, ein gar bequemer und schneller Fortgang zu erwarten sey: so ist doch eben so gewiß, daß man, durch frühzeitigen Gebrauch dieser Bequemlichkeiten, sich gar leicht an ein blos mechanisches Verfahren gewöhnen könne, welches von der ächten Methode abführt und entfernt, und oft in Gefahr setzt, von jenem Hülfsmittel einen ganz irrigen Gebrauch zu machen. Nur alsdenn, wenn man nach dem Muster der Alten den rechten Grund in den ersten Elementen gelegt, und davon Anwendungen auf die physisch-mathematischen Wissenschaften bereits zu machen angefangen hat, kann man erst mit Sicherheit und Nutzen zu solchen Methoden der Neuern übergehen, ohne welche die Erweiterung unsrer erlangten Kenntnisse zu viele Zeit und Mühe kosten, zum Theil unmöglich werden würde.

54.

Da bey folgendem Grundrisse der Plan für diese beyden Classen der Lehrlinge zugleich angelegt worden; für die erste zum hinlänglichen Unterrichte, und für die zweyte entweder zur Vorbereitung auf andre mehr umfassende Lehrbücher, oder zum Uebergange zu einem zweyten Cursus: so mußte in demselben manches mitgenommen werden, was sonst wohl weggeblieben wäre, wenn blos auf Eine Classe hätte Rücksicht genommen werden sollen. So gehört z. E. das 3te Cap. der Arithm. von den Potenzen und Wurzeln der Zahlen, eigentlich für einen zweyten

Cursus; weil zu einer ganz vollständigen Einsicht in diese Materie Kenntnisse, die der erste Cursus nicht giebt, erfoderlich sind; aber für die erste Classe der Lehrlinge ist dieses Capitel um des folgenden Willen unentbehrlich, und giebt zugleich der zweyten Classe einen vorläufigen Unterricht, der ihr bey genauerer Entwickelung dieser Materie im zweyten Cursus sehr zu statten kommen muß. Auf ähnliche Art sind durch das ganze Buch hin und wieder Stellen befindlich, bey denen hauptsächlich auf die zweyte Classe Rücksicht genommen ist, die aber zugleich der ersten, wenn sie ihr auch an sich nicht nothwendig sind, doch wenigstens zur Uebung des Verstandes, und zum Vergnügen des Geistes, dienen können. Noch ist zu gedenken, daß bey manchen Lehren im ersten Theile des Grundrisses Rücksicht auf den zweyten genommen worden; da z. E. die Sätze von den Kugelschnitten zu Ende des 2ten Cap. der Stereom. eine nothwendige Vorbereitung zur Astronomie sind.

55.

Ein allgemeines Gesetz für diesen Grundriß war, die zusammengehörigen Materien auch so zusammen zu stellen, daß die Uebersicht des Ganzen, und der Gebrauch beym Nachschlagen, recht bequem gemacht würde. Denn in einem Lehrbuche muß, meines Erachtens, blos nach diesem Zwecke die Einrichtung getroffen, und gleichsam das Lehrbuch selbst vom Gebrauche des Lehrbuchs unterschieden werden; bey welchem es Jedem freysteht, sich die Materien auch in einer andern Ordnung zu dieser oder jener Absicht auszusuchen. So sind z. E. alle Definitionen und Grundlehren eines jeden Capitels auf Eine Stelle zusammengebracht, und der übrigen Abhandlung vorangeschickt worden; da der Lehrer sie doch auch einzeln in der Ordnung, wie sie nach und nach gebraucht und angewandt werden, ausheben kann. Eben so ist insbesondere in der Arithmetik die Lehre von den unbenannten Zahlen

nach

nach einander in den 4 ersten Capiteln vorgetragen, und alles, was von den benannten Zahlen zu sagen war, im 5ten zusammengefaßt worden: Aber der Lehrer kann aus letzterm das, was zu seinem besondern Zwecke dient, ausheben, und solches gleich auf das 1ste und 2te Capitel folgen lassen, oder gar darein verweben, so wie er es für gut findet. In dem Lehrbuche selbst durften dergleichen Dinge keine andere Stelle haben.

56.

Die Beylagen zur Arithmetik geben Nachrichten, welche zur Rechnung in benannten Zahlen ganz unentbehrlich sind, und zur Erläuterung sowohl, als zur Uebung dieser Lehre gleich zur Hand seyn müssen. Zugleich vertreten sie die Stelle eines ausführlichen Exempelbuches, und ihren Gebrauch lehren die im Texte daraus aufgestellten Beyspiele. Vollständige, vielleicht auch genauere, Tabellen darüber liegen außerhalb dieses Zweckes, und können auch von einem Lehrbuche auf keine Art gefodert, sondern müssen in eignen zu diesem Zwecke geschriebenen Büchern gesucht werden. Was hier davon steht, wird sowohl dem Lehrer, dem das Aufsuchen nutzbarer Exempel in größerer Anzahl immer viele Zeit raubt, als dem Lehrlinge, der aus dieser Quelle selbst schöpfen kann, gute Dienste leisten.

57.

Die Absonderung der Planimetrie und Stereometrie, gleichsam als zweyer besondern Wissenschaften, die doch zusammen die Geometrie ausmachen, und nur die beyden Hauptabschnitte derselben sind, ist an sich willkührlich und ohne alle Folgen; hier aber blos in der Absicht geschehen, damit, wenn etwa dem ersten Cursus der reinen Mathematik ein zweyter folgen sollte, in diesem beyde Wissenschaften unabhängig von einander fortgesetzt werden könnten; da dann auch die ebene Trigonometrie der Planimetrie, und die sphärische der Stereometrie einverleibt werden müßten.

58.

In der Methode für den Vortrag der Geometrie ist und bleibt Euklides immer das Muster, welches auch dem ersten Unterrichte recht eigentlich angemessen, und daher im Grundrisse genau befolgt worden ist. Die am Rande beygesetzten Zahlen verweisen auf seine Elemente (nach der deutschen Uebersetzung Halle 1781.), um beym Gebrauche, da dieser Grundriß zugleich einen kurzgefaßten Commentar mancher Sätze des Euklides in sich faßt, die Vergleichung zu erleichtern. Die veränderte Stellung seiner Sätze, welche durch die beygesetzten Zahlen freylich sehr in die Augen fällt, ist nur äußerst selten --- wovon sich auch jedesmal der Grund leicht einsehen läßt --- mit Veränderung seiner Demonstrationen verbunden, (z. E. §. 233. der Planimetrie) und wird hoffentlich nicht zu einem Vorwurfe gereichen. Auch wird man gar bald finden, daß ich, so wie in vielen andern Dingen, also auch in der Stellung der Sätze, wie sie hier erscheint, ein andres nicht weniger classisches Buch nachzuahmen gesucht; ich meyne die Kästnerischen Anfangsgründe, worin die mit eigenthümlichem Scharfsinne behandelten Lehren der Geometrie gleichsam in Familien so abgesondert sind, daß man ihre Verwandtschaft mit einem Blicke übersehen kann. Die Vortheile hievon leuchten zu sehr in die Augen, als daß man ihnen die Anordnung im Euklides, in so fern hiedurch am Wesentlichen nichts verändert wird, nicht aufopfern sollte.

Anmerk. Bey jedem Capitel ist angezeigt, aus welchem Buche der Elemente es genommen sey; da dann die Zahlen am Rande auf die Definitionen oder Sätze dieses Buchs verweisen. Kommen darunter Sätze aus einem andern Buche vor; so ist zugleich die Zahl solches Buchs vorangesetzt worden. Z. E. §. 189. Plan. (4, 13.) heißt 4tes Buch 13ter Satz.

59.

59.

Dem Vortrage des Euklides mußten auch noch die Ausrechnungen, die demselben gänzlich fehlen, zur unmittelbaren Anwendung der Geometrie aber unentbehrlich sind, beygefügt werden. Sie machen das 4te Cap. der Plan. und das 3te der Stereom. aus. Auch das Nöthigste vom Feldmessen ist dabey mit gelehrt, obgleich dieses freylich auch noch andere Kenntnisse voraussetzt, wenn man etwas Vollkommenes fodert.

60.

In der Lehre von den Verhältnissen, als der Seele der ganzen Mathematik, habe ich mich bestrebt, den Vortrag mit Sorgfalt und Deutlichkeit aus einander zu setzen; und besonders den Uebergang zu benannten Zahlen im 5ten Cap. der Arithmetik, und zu ausgedehnten Größen im 3ten der Planimetrie, einleuchtend zu machen. Die Definition, welche Euklid im 5ten Buche der Elem. von der Proportion giebt, wird, dünkt mich, durch §. 202. der Plan. gewissermaßen ersetzt.

Anmerk. Bey dieser Gelegenheit sey es mir erlaubt, einen Gedanken über Euklids Definition zur Prüfung vorzulegen. Er braucht nämlich die multipla der Glieder; aber warum hat er nicht statt dieser ihre submultipla angenommen? Hiernach wäre $A : B = C : D$, wenn jede ähnliche aliquote Theile der Vorderglieder auf jede ähnliche aliquote Theile der Hinterglieder immer einerley Beziehung, es sey des Gleichen, oder des Größern, oder des Kleinern, hätten, daß nämlich, wenn $\frac{1}{m} A =$ oder $>$ oder $< \frac{1}{n} B$ ist, auch $\frac{1}{m} C$ im ersten Falle $=$ im zweyten $>$ im dritten $< \frac{1}{n} D$ sey, was auch für ganze Zahlen m und n bedeuten mögen.

Wie sehr nach diesem Begriffe Construction und Demonstration simplificirt werden, zeige zum Beyspiele der 1ste Satz des 6sten Buchs, wo (hier nach Fig. 62.) $\triangle ABC : \triangle ACD = BC : CD$, seyn soll. Beweis. Es sey BG ein beliebig aliquoter Theil von BC, und CH von CD. Man ziehe AG, AH: so ist $\triangle ABG$ vom $\triangle ABC$ ein solcher aliquoter Theil, als BG von BC; und eben so $\triangle ACH$ vom $\triangle ACD$ ein solcher aliquoter Theil, als CH von CD. Nun ist stets (was auch für aliquote Theile BG und CH seyn mögen) $\triangle ABG = > < \triangle ACH$, je nachdem $BG = > < CH$ ist. Folglich ist $\triangle ABC : \triangle ACD = BC : CD$.

61.

Die angewandte Mathematik, als der zweyte Theil des Grundrisses, soll so vieles aus den physisch-mathematischen Wissenschaften und der technischen Mathematik in sich fassen, als durch Hülfe der vorausgeschickten Principien festgesetzt werden, und zu einer vortheilhaften Vorbereitung auf genauere und erweiterte Kenntnisse dienen kann. Nur in solcher Anordnung und Verbindung ist es auch möglich, sich allgemein beliebte Kenntnisse von mancherley interessanten Gegenständen aus Astronomie und Physik zu verschaffen; da hingegen abgerissene und außer Verbindung mit Geometrie abgefaßte sogenannte populäre Aufsätze darüber allemal ihres Zweckes verfehlen, den Gewinn ihrer Verfasser und Verleger ausgenommen.

Anmerk. Dieser zweyte Theil des Grundrisses soll in Jahresfrist im Drucke erscheinen, und an Bogenzahl den ersten nicht sehr übertreffen.

62.

Zu einem zweyten Cursus der Mathematik mache ich mich deshalb nicht anheischig, theils weil Leben und Umstände nicht in meiner Gewalt sind; theils weil derselbe (wo nicht auch der erste) denen, die von einem der

Lehr=

Lehrbücher der Herren Kästner, v. Segner, Karsten, Mönnich Gebrauch machen wollen, ganz und gar entbehrlich seyn mögte.

Anmerk. Nur zu einer Probe, wie ich mir die Folge der Materien bey der Anlage des ersten Cursus gedacht habe, sey es mir noch vergönnet, hier mit Wenigem anzugeben, wie in einem zweyten Cursus z. E. die Fortsetzung der Arithmetik eingerichtet werden könnte:

"Cap. 6. Von der Rechnung mit entgegengesetzten Größen und mit Buchstaben. 7. Von den einfachen und zusammengesetzten Zahlen, nebst Aufhebung der Brüche. (Ergänzung des 1. und 2. Cap.) 8. Von den Potenzen und Wurzeln vieltheiliger Größen. (Ergänzung des 3. Cap.) 9. Von der Rechnung mit Wurzelgrößen. 10. Von den arithmetischen und geometrischen Verhältnissen, Proportionen und Progreßionen. (Ergänzung des 4. Cap.) 11. Von Zusammensetzung der Verhältnisse, und den Logarithmen. 12. Von den Gleichungen des 1. und 2. Grades. 13. Anwendung dieser Lehre auf einige Zahlenreihen und ihre Summen. 14. Von den unbestimmten Aufgaben."

Inhalt.

I. Die Arithmetik.

Grundsätze der gesamten Mathematik. §. 1
Eingeführte Zeichen. 13

1. Cap. Von den ganzen Zahlen, oder den Zahlen überhaupt.

Erklärungen. §. 14
Grundlehren. 26
Wahlsatz. Decimalzahlen. 43
Wahlsatz. Arabische Ziffern. 45
Aufgabe. 1. Numeriren. 48
Aufgabe. 2. Addiren. 53
Aufgabe. 3. Subtrahiren. 54
Aufgabe. 4. Das Einmaleins. 55
Aufgabe. 5. Multipliciren. 57
Aufgabe. 6. Dividiren. 58

2. Cap. Von den Brüchen, auch den Decimalbrüchen.

Erklärungen. §. 59
Grundlehren. 64
Aufgabe. 1. Aufheben der Brüche. 72
Aufgabe. 2. Gleichnamig machen. 74
Aufgabe. 3. Addition und Subtraction. 75
Aufgabe. 4. Multiplication. 78
Aufgabe. 5. Division. 84
Lehrsatz. Brüche mit gebrochenen Gliedern. 89
Lehrsatz. Multipliciren und Dividiren der Brüche mit Brüchen. 93
Wahlsatz. Bezeichnung der Decimalbrüche. 95
Aufgabe. 6. Addition und Subtraction. 98
Aufgabe. 7. Multiplication. 99
Aufgabe. 8. Division. 102

3. Cap. Von den Potenzen und Wurzeln der Zahlen.

Erklärungen. §. 106
Grundlehren. 109
Aufgabe. 1. Das Wurzeltäflein. 114
Aufgabe. 2. Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl. 117
Aufgabe. 3. Annäherung der Quadratwurzel. 118
Aufgabe. 4. Quadratwurzel aus Brüchen. 122

Erklä-

Erklärung. Irrationalgrößen. §. 124
Lehrsatz. Annäherung einer Irrationalgröße. 127
Lehrsatz. Gleichheit der Größen, die sich ohne Ende nähern. 129
Aufgabe. 5. Cubikwurzel aus einer ganzen Zahl. 132
Aufgabe. 6. Annäherung der Cubikwurzel. 133
Aufgabe. 7. Cubikwurzel aus Brüchen. 137

4. Cap. Von den Verhältnissen und Proportionen.

Erklärungen. §. 141
Grundsätze. 149
Lehrsatz. 1. Zwey Zahlen, mit einerley multiplicirt oder dividirt, verhalten sich wie die Producte oder Quotienten. 157
Lehrsatz. 2. Eine Proportion giebt zwey gleiche Producte, u. zwey gleiche Producte geben eine Proportion. 162
Lehrsatz. 3. Summen oder Differenzen der Glieder einer Proportion. 169
Lehrsatz. 4. Zusammensetzung der Proportionen. 173

5. Cap. Von der Rechnung in benannten Zahlen, auch den sogenannten Rechnungsregeln.

Erklärungen. §. 182
Aufgabe. 1. Reduction benannter Zahlen. 191
Aufgabe. 2. Addition und Subtraction. 194
Aufgabe. 3. Multiplication. 195
Aufgabe. 4. Division. 196
Aufgabe. 5. Viertes Glied einer geraden Proportion. 197
Aufgabe. 6. Viertes Glied einer umgekehrten Proport. 199
Aufgabe. 7. Viertes Glied einer zusammengesetzten Proportion. 200
Aufgabe. 8. Theilung nach Verhältnissen. 206
Beylage. I. Vom Gewichte. §. 1-9.
Beylage. II. Vom Maaße. §. 10-16.
Beylage. III. Von der Zahl. §. 17.
Beylage. IV. Von den Münzen. §. 18-24.

II. Die Planimetrie.
oder der Geometrie erster Theil.

1. Cap. Von den geradlinichten Figuren.

Erklärungen. §. 1
Foderungen. 28
Grundlehren. 31
Aufgabe. 1. Einen gleichseitigen Δ zu beschreiben. 46
Lehrsatz. 1. Congruenz der Δ aus 2 Seiten u. 1 Winkel. 47
Lehrsatz. 2. Winkel im gleichschenklichten Δ. 49
Lehrsatz. 3. Congruenz der Δ aus 3 Seiten. 53
Aufgabe. 2. Winkel und Linien zu halbiren. 56
Aufgabe. 3. Perpendikel zu errichten und zu fällen. 58
Lehrsatz. 4. Nebenwinkel und Scheitelwinkel. 61
Lehrsatz. 5. 2 Winkel des Δ kleiner als 2 rechte. 67
Lehrsatz. 6. 2 Seiten des Δ größer als die 3te. 72
Aufgabe. 4. Einen Winkel aufzutragen. 77
Lehrsatz. 7. Ungleichheit der Δ aus 2 Seiten u. 1 Winkel. 78
Lehrsatz. 8. Congruenz der Δ aus 2 Winkeln und 1 Seite. 80
Lehrsatz. 9. Kennzeichen paralleler Linien. 81
Lehrsatz. 10. Kennzeichen convergenter Linien. 83
Lehrsatz. 11. Die Winkel des Δ 2 rechten gleich. 98
Lehrsatz. 12. Gleichheit der Parallelogramme und Δ von gleichen Grundlinien und Höhen. 106
Lehrsatz. 13. Gleichheit der Complemente im Parallelogramm. 111
Lehrsatz. 14. Der Pythagorische Satz. 117

2. Cap. Vom Kreise.

Erklärungen. §. 121
Lehrsatz. 1. Perpendikel auf die Sehne. 135
Lehrsatz. 2. Gleichheit der Sehnen und ihres Abstandes. 153
Lehrsatz. 3. Tangente des Kreises. 157
Lehrsatz. 4. Centri- und Peripherie-Winkel. 165
Lehrsatz. 5. Gleichheit der Winkel und Bogen. 176
Lehrsatz. 6. Reguläre Figuren am Kreise. 181

3. Cap. Von der Proportion und Aehnlichkeit.

Erklärungen und Grundlehren. §. 194
Lehrsatz. 1. Verhältniß der Parallelogramme und Δ von gleicher Höhe. 208

Lehr-

Lehrsatz. 2. Schnitt des Δ mit einer Seite parallel. §. 210
Lehrsatz. 3. Aehnlichkeit der Δ aus Gleichheit der Winkel oder Proportion der Seiten. 214
Lehrsatz. 4. Aehnlichkeit der Δ aus Proportion der einen gleichen Winkel einschließenden Seiten. 222
Lehrsatz. 5. Gleichheit der Δ aus verkehrter Proportion der einen gleichen Winkel einschließ. Seiten. 229
Lehrsatz. 6. Verhältnisse ähnlicher Figuren. 231
Lehrsatz. 7. Verhältnisse ähnlicher Figuren im Kreise. 232
Lehrsatz. 8. Proportionen am Kreise. 233
Lehrsatz. 9. Proportion mit der Tangente des Kreises. 235
Lehrsatz. 10. Verhältniß der Bogen u. Winkel im Kreise. 236

4. Cap. Von der Ausmessung, auch dem Feldmessen.

Wahlsatz. Das Längenmaaß. §. 241
Aufgabe. 1. Inhalt eines Rectangels. 247
Aufgabe. 2. Inhalt jeder geradlinichten Figur. 254
Wahlsatz. Das Winkelmaaß. 261
Aufgabe. 3. Winkel eines regulären Polygons. 263
Lehrsatz. Vergleichung der Kreisfläche. 264
Aufgabe. 4. Verdoppelung der Seitenzahl eines Polyg. 265
Aufgabe. 5. Umfang und Inhalt des Kreises. 268
Foderung. Linien u. Winkel auf dem Felde zu messen. 273
Aufgabe. 6. Weite mit zwey zugängigen Endpunkten. 274
Aufgabe. 7. Weite mit einem zugängigen Endpunkte. 275
Aufgabe. 8. Weite ganz ohne Zugang. 276
Aufgabe. 9. Das Aufnehmen der Figuren. 277
Aufgabe. 10. Das Höhenmessen. 278
Aufgabe. 11. Das Nivelliren. 279

III. Die Stereometrie.

oder der Geometrie zweyter Theil.

1. Cap. Von der Lage der Ebenen.

Erklärungen. §. 1
Grundlehren. 9
Lehrsatz. 1. Ein Perpendikel auf einer Ebene. 14
Lehrsatz. 2. Zwey Perpendikel auf einer Ebene. 16
Aufgabe. Perpendikel auf Ebenen zu errichten und zu fällen. 19

Lehr-

Lehrsatz. 3. Perpendiculare Ebenen. §. 30
Lehrsatz. 4. Die ebenen Winkel einer Ecke. 37

2. Cap. Von den Körpern.

Erklärungen. §. 38
Lehrsatz. 1. Ein Parallelepipedon ist von lauter Parallelogrammen eingeschlossen. 58
Lehrsatz. 2. Parallelepipeda von gleicher Höhe auf einerley Grundfläche. 64
Lehrsatz. 3. Parallelepipeda von gleicher Höhe auf gleichen Grundflächen. 67
Lehrsatz. 4. Schnitt der Pyramide. 71
Lehrsatz. 5. Pyramiden v. gleichen Grundflächen u. Höhen. 76
Lehrsatz. 6. Die Pyramide $\frac{1}{3}$ des Prisma. 78
Lehrsatz. 7. Schnitt des Cylinders. 80
Lehrsatz. 8. Schnitt des Kegels. 82
Erklärung. Die Kugel. 85
Lehrsatz. 9. Die Kugelschnitte. 90
Lehrsatz. 10. Axe und Pole des Kugelschnitts. 96
Lehrsatz. 11. Axe und Pole der Parallelkreise. 107

3. Cap. Von der Ausmessung der Körper und ihrer Flächen.

Aufgabe. 1. Inhalt eines rechtwinkl. Parallelepipedon. §. 114
Aufgabe. 2. Inhalt jedes prismatischen Körpers. 121
Aufgabe. 3. Inhalt jedes pyramidalischen Körpers. 129
Aufgabe. 4. Die Seitenflächen prismatischer und pyramidalischer Körper. 133
Lehrsatz. 1. Die Kugelfläche. 134
Lehrsatz. 2. Inhalt der Kugel. 137
Lehrsatz. 3. Verhältniß ähnlicher Körper. 139

Der

Der erste Cursus der Arithmetik.

Grundsätze der gesammten Mathematik.

§. 1. Von gleichen Dingen läßt sich, der Größe unbeschadet, das eine für das andere setzen.

§. 2. Jede Größe ist sich selbst, so wie auch allen ihren Theilen zusammen, gleich.

§. 3. Das Ganze ist größer, als jeder seiner Theile.

§. 4. Zwey Größen, deren jede einer dritten Größe gleich ist, sind selbst einander gleich.

§. 5. Gleiches zu Gleichem hinzugesetzt giebt Gleiches.

§. 6. Gleiches zu Ungleichem hinzugesetzt giebt Ungleiches.

§. 7. Gleiches von Gleichem hinweggenommen, läßt Gleiches.

§. 8. Gleiches von Ungleichem hinweggenommen, läßt Ungleiches.

§. 9. Gleiches gleich vielmal genommen, bringt Gleiches.

§. 10. Ungleiches gleich vielmal genommen, bringt Ungleiches.

§. 11. Gleiches durch Gleiches getheilt, bringt Gleiches.

§. 12. Ungleiches durch Gleiches getheilt, bringt Ungleiches.

Eingeführte Zeichen.

§. 13. Das Zeichen der Gleichheit ist $(=)$
der Aehnlichkeit $(\backsim)$
des Größern $(>)$
des Kleinern $(<)$
des Hinzuthuns $(+)$
des Hinwegnehmens $(-)$
des Vervielfältigens $(\cdot)$
oder $(\times)$
des Theilens $(:)$

Das I. Capitel.

Von den ganzen Zahlen, oder den Zahlen überhaupt.

Erklärungen.

§. 14. Dinge von einerley Art heißen die, an denen man blos ihr Uebereinstimmiges betrachtet.

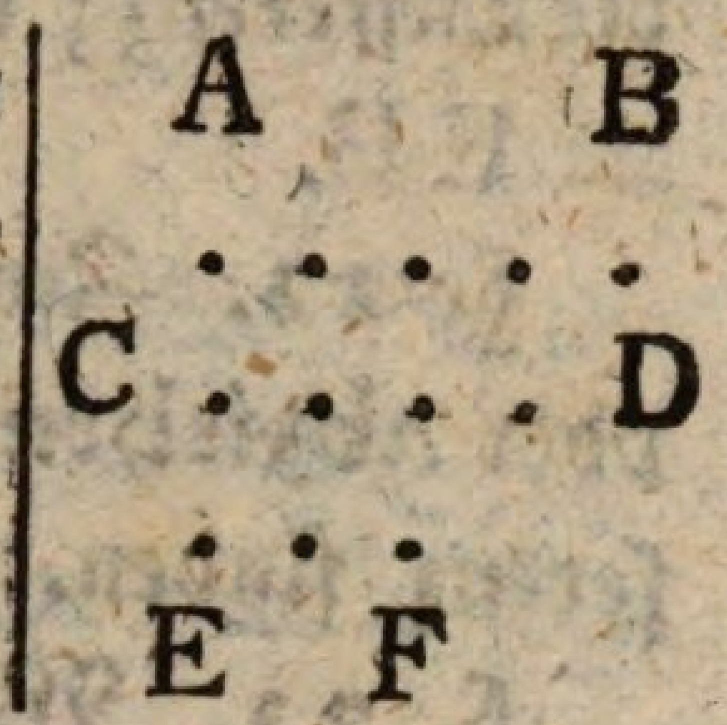
§. 15. Eine Zahl (ganze Zahl) ist, was die Menge oder Vielheit der Dinge von einerley Art bestimmt.

§. 16. Die **Einheit** ist das, worinn Dinge, die zusammengezählt werden, übereinstimmen; wonach auch jedes dieser Dinge eine **Einheit** oder **Eins** heißt.

§. 17.

§. 17. Werden zwey oder mehrere beliebige Zahlen zu einander gesetzt: so heißt die Zahl, die allen zusammen gleich ist, ihre **Summe**.

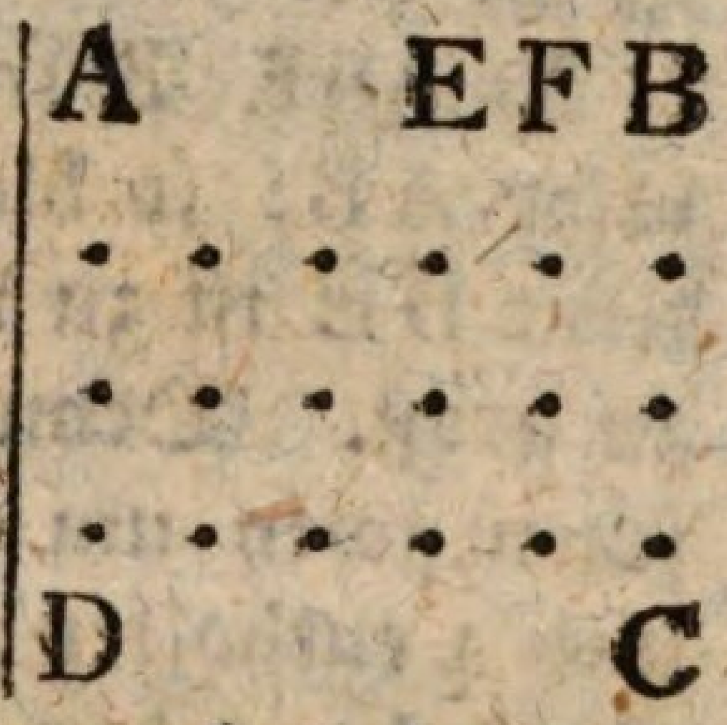
So ist z. E. AF die Summe von AB, CD, EF; oder es ist AB + CD + EF = AF.



§. 18. Zwey oder mehrere Zahlen zu einander **addiren** heißt ihre Summe finden.

§. 19. Wird von zwey gegebenen Zahlen, den **Factoren**, die eine, der **Multiplicandus**, so vielmal zu sich selbst addirt, als die andere, der **Multiplicans**, Einheiten enthält: so heißt das, was herauskömmt, **ihr Product**, oder **Factum**.

Z. E. wenn AB der Multiplicandus, BC, der Multiplicans: so ist AC das Product aus AB und BC; oder es ist AB × BC = AC.



§. 20. Zwey Zahlen mit einander **multipliciren** heißt, ihr Product oder Factum finden.

Anmerk. Drey Zahlen werden mit einander multiplicirt, wenn man das Product aus zweyen mit der dritten multiplicirt. Z. E. 3. 4. 5 = (3. 4). 5; auf ähnliche Art verfährt man bey mehrern Factoren.

§. 21. Wird von einer Zahl, dem **Minuendus**, eine andere, der **Subtrahendus**, weggenommen: so heißt das, was nach solcher Wegnahme übrig bleibt, der **Rest**, **Ueberschuß**, **Unterschied**, oder die **Differenz** dieser beyden Zahlen.

Z. E. wenn AB der Minuendus, CD der Subtrahendus: so ist EB die Differenz; oder es ist AB — CD = EB.

A E B
. . . .
. . . .
C D

§. 22. Zwey Zahlen von einander **subtrahiren**, oder **abziehen**, heißt ihren Unterschied, oder ihre Differenz finden.

§. 23. Wird von zwey gegebenen Zahlen die eine, der **Divisor**, von der andern, dem **Dividendus**, wiederholentlich so oft abgezogen, bis nichts mehr vorhanden: so heißt die Zahl, welche anzeigt, wie oft solcher Abzug geschehen, der **Quotient**.

Z. E. wenn (Fig. §. 19.) AC der Dividendus, AB der Divisor: so ist BC der Quotient; oder es ist AC : AB = BC.

Anmerk. Wäre der Dividendus AD, der Divisor AB: so bleibt ein Rest CD, und der Quotient BE ist zu klein, mit Eins aber vermehrt zu groß. Demnach ist hier der Quotient zwischen zwey um Eins unterschiednen Zahlen 3 und 4 enthalten; was er aber sey, kann erst im Capitel von den Brüchen gezeigt werden.

A B
. . . .
. . . .
. . . . E
. . .
C D

§. 24. Zwey Zahlen mit einander **dividiren** heißt, ihren Quotienten finden.

Anmerk. Bleibt bey der Division kein Rest, daß man den Quotienten in einer ganzen Zahl findet: so sagt man, daß sie aufgehe; und der Divisor heißt ein aliquoter Theil des Dividendus, der von ihm genau gemessen wird.

§. 25. Aus gegebenen Zahlen andere finden, die auf die gegebenen eine verlangte Beziehung haben, heißt **rechnen**; und die Art solches zu bewerkstelligen, eine **Rechnungsart**, oder **Species** der Rechenkunst; dergleichen die **Addition** §. 18, die **Multiplication** §. 20,

§. 20, die Subtraction §. 22, und die Division §. 24. Diese heißen zusammen die gemeinen Rechnungsarten.

Grundlehren.

§. 26. Nur Dinge von einerley Art lassen sich zusammenzählen, oder können eine Zahl ausmachen. §. 15.

§. 27. Die Zahl (ganze Zahl) enthält eine Menge von Einheiten. §. 16.

§. 28. Die Differenz zweyer Zahlen zu der kleinern addirt giebt die größere, §. 17. 21. als welche aus der kleinern und der Differenz bestehet; daher die Probe der Subtraction.

§. 29. Von der Summe zweyer Zahlen die eine subtrahirt giebt die andere §. 17. 21. als welche mit der ersten die Summe ausmacht; daher die Probe der Addition.

§. 30. Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man einerley beliebige Zahl zu ihr addirt, und von solcher Summe wieder subtrahirt. §. 17. 21.

Anmerk. Die Subtraction ist das entgegengesetzte Verfahren der Addition. Durch diese wird Etwas hinzugethan, durch jene Etwas hinweggenommen.

§. 31. In dem Producte steckt jeder der beyden Factoren, so vielmal, als die Einheit in dem andern.

Denn (Fig. §. 19.) entsteht das Product AC, wenn man für jede Einheit im Multiplicans BC den Multiplicandus AB einmal setzt. Nun giebt jede Einheit in AB so vielmal gesetzt, als BC Einheiten hat, den Multiplicans BC selbst. Folglich ist auch für jede Einheit im Multiplicandus AB der Multiplicans BC einmal gesetzt.

§. 32. Einerley Factoren geben, auch mit veränderter Ordnung, einerley Product; das ist, man erhält ein und dasselbe Product, man mag AB mit BC, oder BC mit AB multipliciren. §. 31.

§. 33. Sind die Factoren in Theile zerlegt: so geben die einzelnen Producte der Theile zusammen das gesammte Product.

Denn es sey (Fig. §. 19.) AB in zwey Theile AE und FB zerlegt: so werden beyde Theile so vielmal gesetzt, als BC Einheiten hat, folglich beyde mit BC multiplicirt. Demnach ist $AB \times BC = AE \times BC + FB \times BC$. Auch ist $BC \times AB = BC \times AE + BC \times FB$.

§. 34. Das Product aus zwey Factoren ist mit einer beliebigen Zahl (4) multiplicirt, wenn man mit solcher Zahl einen der beyden Factoren multiplicirt; das ist, das neue Product ist um so viel größer, um so viel entweder der Multiplicandus, oder der Multiplicans größer gemacht war. Z. E. (8. 6). 4 = (8. 4). 6 = 8. (6. 4). vergl. §. 20. Anmerk. und §. 32.

§. 35. Das Product aus zwey Factoren ist mit dem Producte aus zwey beliebigen Zahlen (4. 3) multiplicirt, wenn man mit der einen Zahl den einen, und mit der andern Zahl den andern Factor multiplicirt. Z. E. (8. 6). (4. 3) = (8. 4). (6. 3).

Denn das neue Product ist dreymal größer als (8. 4). 6, welches schon viermal größer, als 8. 6. war. §. 34. vergl. §. 20. Anmerk. und §. 32.

§. 36. In dem Dividendus steckt der Divisor so vielmal, als die Einheit im Quotienten.

Denn

Denn für ein jedesmaliges Abziehen des Divisors AB kömmt eine Einheit in den Quotienten BC. §. 23.

§. 37. Der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt giebt den Dividendus §. 36. Daher die Probe der Division.

§. 38. Ein Product mit dem einen Factor dividirt giebt den andern §. 31. 36. Daher die Probe der Multiplication.

§. 39. In dem Dividendus steckt auch der Quotient so vielmal, als die Einheit im Divisor §. 31. 37.

§. 40. Die Division ist eine **Eintheilung** des Dividendus in gleiche Theile, entweder von der Größe des Divisors §. 36, oder von der Größe des Quotienten §. 39; da denn die Anzahl solcher Theile im ersten Fall durch den Quotienten, im zweyten durch den Divisor bestimmt wird.

§. 41. Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie mit einer beliebigen Zahl multiplicirt, und mit eben der Zahl solches Product wieder dividirt. §. 19. 23.

Anmerk. Die Division ist das entgegengesetzte Verfahren der Multiplication. Durch diese wird eine Zahl wiederholentlich addirt, durch jene aber subtrahirt. Durch das Multipliciren kann man von einer Zahl ein beliebig Vielfaches machen; durch das Dividiren einen so vielten Theil, als man will, von ihr darstellen. Durch jenes wird sie um so vielmal vergrößert; durch dieses um so vielmal verkleinert.

§. 42. Obige Sätze gelten auch von Brüchen, wofern ihr Beweis nicht auf ganze Zahlen eingeschränkt ist; in welchem Falle noch besondere Beweise im Folgenden vorkommen. §. 80. 81. 86. 87.

Wahlsatz.

§. 43. Aus zehn Einheiten, die man **Einer** nennt, mache man ein Zusammengesetztes, das ein Zehner heiße, das Zehnfache des Einers. So werde ferner aus zehn Zehnern ein **Hundert**, das Zehnfache des Zehners, oder das Hundertfache des Einers; aus zehn Hunderten ein Tausend, das Zehnfache des Hunderts, oder das Tausendfache des Einers.

Auf eben die Art unterscheide man wieder bey den Tausenden, das Ein- Zehn- Hundert- Tausendfache, und nenne letzteres eine **Million**, das Millionfache des Einers.

So heiße ferner das Millionfache der Million eine **Billion**; das Millionfache der Billion eine **Trillion** u. s. w.

§. 44. Zusatz. Hiedurch erhält man verschiedene **Classen** oder **Ordnungen** von Einheiten: die erste Classe der Einer, die zweyte der Zehner u. s. w. von denen jede folgende den zehnfachen Werth der zunächst vorhergehenden hat, dergestalt, daß aus der ersten Classe, oder der Classe der Einer, alle übrige zusammengesetzt sind, so wie die Classe der Einer selbst aus der **ursprünglichen** oder **primitiven** Einheit entstehet, welche daher bey allen Classen zum Grunde liegt.

Wahlsatz.

§. 45. Die Einheiten einer jeden Classe zähle man von Null bis auf Neun, und bezeichne ihre Zahlen durch die bekannten Arabischen Ziffern

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

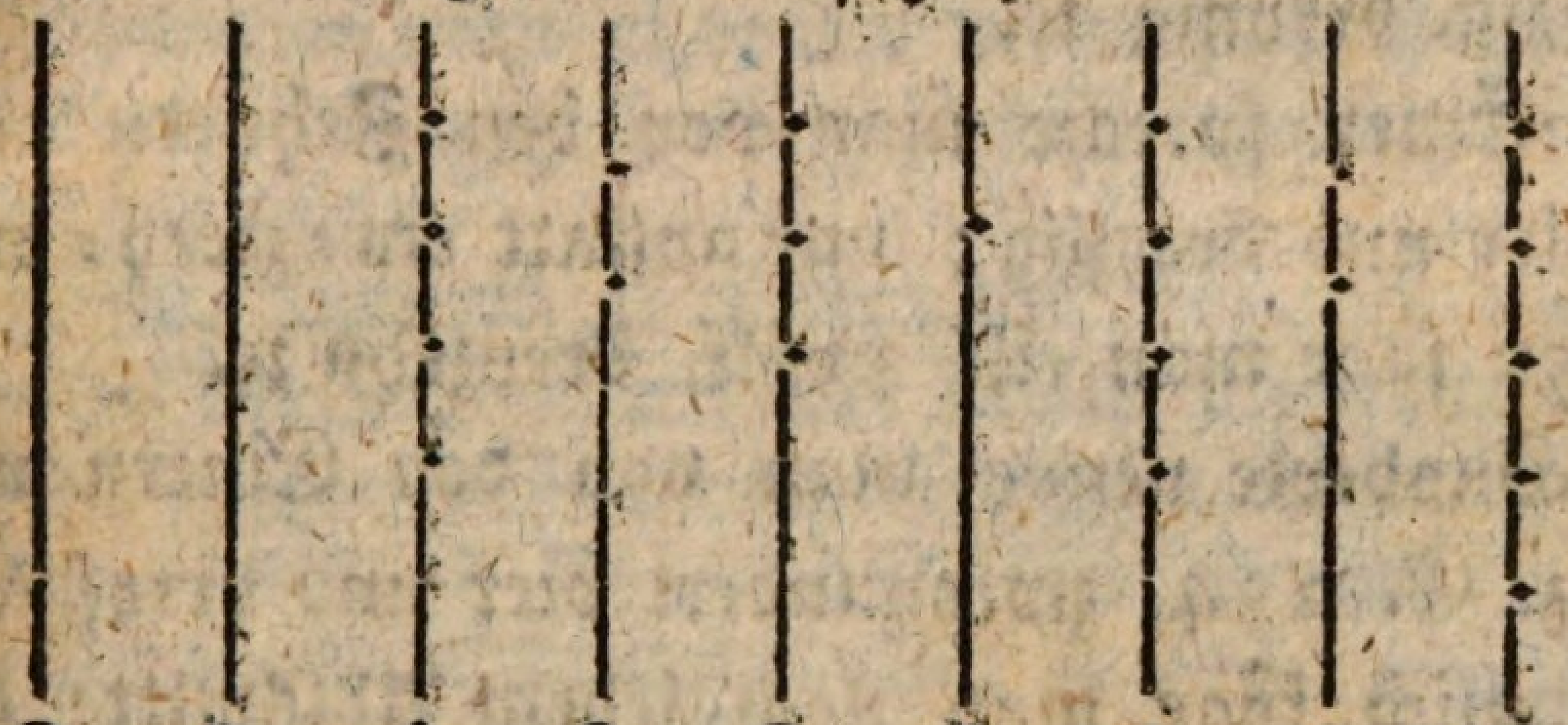
ihren

ihren Werth aber durch die Stelle, welche ihre Ziffer von der rechten Hand gegen die linke in der Ordnung einnimmt, wie die Classen der Einheiten auf einander folgen, so daß eine Ziffer in der ersten Stelle die erste Classe, in der zweyten die zweyte u. s. w. bedeute.

So heißt z. E. 3, drey Einer; 70, kein Einer, sieben Zehner; 45, fünf Einer, vier Zehner; 906, sechs Einer, kein Zehner, neun Hunderte, u. s. w.

§. 46. Zusatz. Hiedurch erhalten die Millionen die sechste Stelle nach den Einern; die Billionen die zwölfte; die Trillionen die achtzehnte, und so immer um sechs Stellen weiter. Bey allen Stellen aber hat jede folgende den zehnfachen Werth der zunächst vorhergehenden. §. 44.

§. 47. Anmerk. Um diese Art zu zählen sinnlicher zu machen, ziehe man Striche in der Länge, und belege sie mit Marken nach folgendem Gesetze:



0 0 4 2 3 1 4 2 5

Die Marken auf dem ersten Striche rechter Hand bedeuten Einer, auf dem zweyten Zehner, auf dem dritten Hunderte u. s. w. so daß immer für jede zehn Marken, die auf einen Strich kommen sollten, nur eine Marke auf den zunächst folgenden Strich gelegt wird. Hiedurch wird nicht nur eine Menge Marken erspart, sondern auch eine große Zahl viel leichter übersehen werden können. Anstatt der Marken schreibe man nachher Ziffern auf die Striche, so daß sie in eine Reihe kommen, und lösche endlich auch die Striche aus.

Die 1ste Aufgabe.

§. 48. Eine mit Arabischen Ziffern geschriebene Zahl mit Worten auszusprechen.

Auflösung. I. Von der rechten Hand gegen die linke mache man Abtheilungen von sechs zu sechs Ziffern, so weit es gehet; in jeder Abtheilung aber Abschnitte zu drey Ziffern. Die Stelle der Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. bezeichne man mit ′, ″, ‴ ꝛc. die jedesmalige Stelle der Tausende aber mit einem Punkte, auf folgende Art:

75‴204·063″875·142′986·234

II. Jeden Abschnitt, von der linken Hand gegen die rechte, spreche man, als für sich bestehend, nach folgenden Sprachregeln aus:

1) Den Namen Einer lasse man weg, und sage blos Eins, Zwey, Drey ꝛc.

2) anstatt eins, zwey, drey ꝛc. Zehner, sage man zehn, zwanzig, dreyßig ꝛc.

3) die Einer spreche man vor den Zehnern aus, z. E. 34 vier und dreyßig; nur anstatt ein-zwey-drey ꝛc. und zehn sage man eilf, zwölf, dreyzehn ꝛc.

4) die Hunderte nenne man von den Einern und Zehnern, z. E. 234, zweyhundert vier und dreyßig.

III. Endlich füge man noch jedem Abschnitte den dafür bezeichneten Werth bey. Hiernach heißt obige Zahl: 75 Trillionen; 204 tausend und 63 Billionen; 875 tausend und 142 Millionen; 986 tausend und 234.

Beweis. Jede Abtheilung enthält eine Menge Einheiten von der Art, von welcher die niedrigste Ziffer in solcher Abtheilung ist §. 45, welche Art aus §. 46 leicht erkannt wird.

§. 49. Zusatz. Hieraus erhellet zugleich, wie eine mit Worten ausgesprochene Zahl mit Arabischen Ziffern zu schreiben sey.

Auch siehet man leicht ein, daß sich jede auf solche Art bezeichnete Zahl auf mannichfaltige Weise ausdrücken und zertheilen lasse. So ist z. E. 3000 = 3 Tausende = 30 Hunderte = 300 Zehner; und 752 = 7 Hunderte + 5 Zehner + 2 Einer = 75 Zehner + 2 Einer = 74 Zehner + 12 Einer.

§. 50. **Erklärung.** Die Art bis Zehn zu zählen, heißt die **Decadik**, oder das **Decimalsystem**; die also abgetheilten Zahlen heißen **Decimalzahlen**. Die Art jede Zahl nach einem gewissen System zu bezeichnen und auszusprechen, heißt das **Numeriren**, oder die **Numeration**.

§. 51. Anmerk. 1. Die sinnreiche Art die Zahlen mit Ziffern zu bezeichnen §. 45, bringt bey den Rechnungsarten den Vortheil, daß man an den Werth der Ziffern während der Operation nicht zu denken braucht, als welcher sich durch die Stelle, die man ihnen nach den Regeln geben muß, von selbst bestimmt.

§. 52. Anmerk. 2. Betrachtet man bey einem Zahlenexempel die Zahlen nur als Zahlen überhaupt, nicht aber als bestimmte Zahlen, und bezeichnet die Rechnungsoperationen blos durch die arithmetischen Zeichen, ohne sie mit den Zahlen selbst vorzunehmen: so erhält man dadurch den Vortheil, durch Schlüsse, welche ein Exempel erläutert, einen allgemeinen Beweis zu führen; indem ein solcher Beweis alsdann nicht auf das gebrauchte Exempel gegründet ist, sondern bey jedem andern Exempel dieser Art immer derselbe bleibt, folglich allgemein ist.

Die 2te Aufgabe.

§. 53. **Zwey oder mehrere Zahlen zu einander zu addiren.**

Auflö-

Auflösung. 1) Man schreibe die gegebenen Zahlen so, daß die Ziffern von einerley Classe unter einander stehen.

2) Man zähle die Ziffern von einerley Classe, von der niedrigsten an bis zur höchsten, zusammen, und setze die jedesmalige Summe unter die ihr zugehörige Classe.

642
253
895

3) Erhält man in einer Classe eine Summe von mehrern Ziffern: so setze man die niedrigste Ziffer solcher Summe unter diese Classe, und addire die übrigen zu der nächst folgenden.

378	378
965	965
493	493
1836	16
	22
	16
	1836

Beweis. Die also gefundene Zahl enthält alle Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. das ist, alle Theile der gegebenen, und ist daher den gegebenen Zahlen zusammen gleich, folglich ihre Summe. So ist z. B. bey dem ersten Exempel

$$600 + 40 + 2 = 642$$
$$\text{und } 200 + 50 + 3 = 253$$
$$\text{folglich } 800 + 90 + 5 = 895.$$

Die 3te Aufgabe.

§. 54. Zwey Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung. 1) Man schreibe die kleinere Zahl unter die größere, so daß die Ziffern von einerley Classe unter einander stehen.

2) In jeder Classe, von der niedrigsten an bis zur höchsten, subtrahire man die untere Ziffer von der

576
372
204

der obern, und setze die jedesmalige Differenz unter die ihr zugehörige Classe.

3) Ist in einer Classe die untere Ziffer grösser, als die obere: so nehme man von der obern Ziffer der nächst folgenden Classe eine Einheit, wofür zehn Einheiten zur vorhergehenden Classe hinzukommen, in welcher nunmehr die Subtraction geschehen kann. Man nennt dieses **borgen**, und bemerkt es durch einen Punkt, welcher anzeigt, daß die Ziffer, von der man geborgt hat, um Eins kleiner geworden ist.

$$\begin{array}{r} \dot{8}\,\dot{3}\,3 \\ 2\,5\,4 \\ \hline 5\,7\,9 \end{array}$$

4) Findet man in der Stelle, wo man borgen will, eine Null: so borge man von der nächst folgenden; wodurch in die Stelle der Null zehn Einheiten kommen, und wenn davon eine genommen wird, noch 9 bleiben.

$$\begin{array}{r} \dot{7}\,\dot{0}\,3 \\ 2\,7\,5 \\ \hline 4\,2\,8 \end{array}$$

5) Folgen zwey oder mehrere Nullen auf einander: so borge man von der zunächst kommenden Ziffer; da sich dann obige Schlüsse leicht wiederholen lassen.

$$\begin{array}{r} \dot{8}\,\dot{0}\,\dot{0}\,\dot{0}\,3 \\ 2\,6\,9\,4\,7 \\ \hline 5\,3\,0\,5\,6 \end{array}$$

Beweis. Die also gefundene Zahl enthält den Ueberschuß aller Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. folglich den ganzen Ueberschuß der größern Zahl über die kleinere, und ist also der Ueberschuß oder die Differenz der beyden gegebenen Zahlen. So ist z. B. beym ersten Exempel:

$$\begin{array}{rl} & 500 + 70 + 6 = 576 \\ \text{und} & 300 + 70 + 2 = 372 \\ \hline \text{folglich} & 200 + 00 + 4 = 204 \end{array}$$

und §. 49. beym dritten Exempel: $700 + 00 + 3 = 600 + 100 + 3$

$= 600$

$$= 600 + 90 + 13 = 793$$

$$\text{und } 200 + 70 + 5 = 275$$

$$\text{folglich } 400 + 20 + 8 = 428.$$

Die 4te Aufgabe.

§. 55. Die Producte aller Zahlen, die nur mit einer Ziffer geschrieben werden, zu finden; oder das Einmaleins zu machen.

Auflösung. Man setze die 9 Ziffern in einer Querreihe neben einander, so hat man ihr **Einfaches**; man addire jede zu ihr selbst, so hat man in der zweyten Reihe ihr **Zweyfaches**; man addire das Einfache zum Zweyfachen, so hat man in der dritten Reihe ihr **Dreyfaches**. Addirt man ferner so das Einfache zu dem Dreyfachen u. s. w. so erhält man ihr **Vierfaches** bis **Neunfaches**, wie beystehende Tafel,

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

welche auch die Pythagorische Tafel heißt, zeiget; worin von den Factoren eines jeden dieser Producte der eine darüber in der ersten Querreihe, der andere zur Seite in der ersten Seitenreihe stehet.

§. 56.

§. 56. **Zusatz.** Sind den Ziffern Nullen angehängt: so nehme man ihr Product aus der Pythagorischen Tafel, und hänge demselben so viele Nullen an, als sich in den Factoren zusammen befinden §. 35. 45.

Die 5te Aufgabe.

§. 57. Zwey Zahlen mit einander zu multipliciren.

Erster Fall.

Wenn der Multiplicans nur eine Ziffer hat.

Auflösung. 1) Jede Ziffer in A multiplicire man mit B, und mache die einzelnen Producte C, D, E, F nach §. 55. 56.

2) Diese Producte addire man: so ist ihre Summe G das gesuchte Product der gegebenen Zahlen A, B.

4528	A
3	B
24	C
60	D
1500	E
12000	F
13584	G

3) Eben dieses Product G erhält man folgendermaßen noch kürzer: Man multiplicire mit B jede Ziffer in A von der rechten Hand gegen die linke, setze bey jedem Producte die niedrigste Ziffer unter die zugehörige Ziffer in A, und addire die höhere Ziffer zu dem nächstfolgenden Producte.

4528	A
3	B
13584	

4) Sind den Factoren Nullen angehängt, so hänge man dem oben gefundenen Producte eben so viele Nullen an. §. 56.

Beweis. Die Zahl G enthält die Producte der Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. der Zahl A in die Zahl B, und ist also das Product der gegebenen Zahlen §. 33. So ist

$$A = 4000 + 500 + 20 + 8$$
$$B = 3$$
$$A, B = 4000.3 + 500.3 + 20.3 + 8.3.$$

Zweyter

Zweyter Fall.

Wenn der Multiplicans mehr als eine Ziffer hat.

58472	A
2034	B
233888	C
175416	D
116944	E
118932048	F

Auflösung. 1) Man setze den Multiplicans B unter den Multiplicandus A, so daß die Ziffern von einerley Classe unter einander stehen.

2) Mit jeder Ziffer des Multiplicans B verfahre man nach dem ersten Falle, Auflös. 3.

3) Jedes der einzelnen Producte C, D, E, setze man so, daß seine niedrigste Ziffer unter die zugehörige Ziffer des Multiplicans B kömmt.

4) Diese Producte addire man: so ist ihre Summe F das gesuchte Product der gegebenen Zahlen A, B.

5) Sind den Factoren Nullen angehängt: so hänge man dem oben gefundenen Producte eben so viel Nullen an. §. 56.

Beweis. Die Zahl F ist das Product des Multiplicandus A in die Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. des Multiplicans B, folglich in den gesammten Multiplicans B. §. 33. So ist A. B = A. 2000 + A. 30 + A. 4.

Die 6ste Aufgabe.

§. 58. Zwey Zahlen mit einander zu dividiren.

Erster Fall.

Wenn der Divisor nur eine Ziffer hat.

Auflö-

B	A	Q
3)	26295	8000 C
	24000	700 D
	2295	60 E
	2100	5 F
	195	8765 G
	180	
	15	
	15	
	0	

Auflösung. 1) Man suche in dem Einmaleins §. 55, wie vielmal der Divisor B in der höchsten Ziffer des Dividendus, oder, wenn diese kleiner als der Divisor ist, in den beyden höchsten Ziffern (26) des Dividendus A stecke.

2) Die gefundene Zahl (8) schreibe man in die Stelle des Quotienten Q, und nach ihr so viel Nullen, als noch Ziffern im Dividendus übrig sind, wie bey C.

3) Mit dem Quotienten C multiplicire man den Divisor B, und subtrahire das Product (24000) von dem Dividendus.

4) Mit dem Reste (2295) verfahre man wieder eben so, wie 1, 2, 3, lehret; und setze diese Operation eben so bis zu Ende fort.

5) Die also gefundnen Quotienten, C, D, E, F, addire man: so ist ihre Summe G der gesuchte Quotient.

Beweis. Jede der gefundnen Zahlen C, D, E, F, zeigt an, wie vielmal der Divisor B, nach den Einheiten einer solchen Zahl, im Dividendus A enthalten sey, (nämlich C, wie viel Tausende des Divisors D, wie viel Hunderte ꝛc.) folglich die gesammte Zahl G, das wie vielfache des Divisors B im Dividendus A enthalten sey, und ist also der gesuchte Quotient.

Andere Auflösung. Da man hier, so wie bey den vorhergehenden Rechnungsarten, an den Werth der Ziffern während der Operation nicht zu denken braucht §. 51: so kann man auch auf folgende Art verfahren;

1) Man suche den ersten Theil des Quotienten (8) und subtrahire sein Product in den Divisor (24) von dem ersten Theil des Dividendus (26).

2) Dem Reste (2) füge man die folgende Ziffer des Dividendus (2) bey, daß sie mit ihm den zweyten Theil des Dividendus (22) mache.

3) Zu diesem zweyten Theile des Dividendus suche man den zweyten Theil des Quotienten (7), verfahre damit, wie mit dem ersten, und wiederhole dieselbe Operation bis zu Ende.

```
B  A     | G
3) 26295 | 8765
   24
   --
   22
   21
   --
    19
    18
    --
     15
     15
     --
      0
```

4) Kömmt hiebey ein Theil des Dividendus vor, der kleiner als der Divisor ist, wie bey D: so füge man ihm die noch weiter folgende Ziffer 5 des Dividendus bey; bemerke aber dieses jedesmal durch eine Null im Quotienten, damit dessen Ziffern ihre gehörige Stelle erhalten.

```
B  A     | C
3) 25215 | 8405
   24
   --
   12
   12
   --
  D 15
    15
    --
     0
```

Anmerk. Sieht man den Divisor B nach §. 40 als die Anzahl der gleichen Theile an, in welche der Dividendus A getheilt werden soll, hier in 3: so verfahre man auf folgende Art:

1) Man theile die (26) tausende des Dividendus in drey Theile, so ist ein solcher Theil C (8000).

2) Zu den übriggebliebenen (2) tausenden, die man in (20) hunderte verwandelt, setze man die (2) hunderte des Dividendus, und theile auch diese (22) hunderte wieder in drey Theile; da dann ein solcher Theil D (700) ist.

```
B  A     | CDEF
3) 26295 | 8765
   24
   --
   22
   21
   --
    19
    18
    --
     15
     15
     --
      0
```

3) Zu

3) Zu den übriggebliebenen (1) Hunderten, die man in (10) Zehnern verwandelt, setze man die (9) Zehner des Dividendus, und theile auch diese (19) Zehner wieder in drey Theile; da dann ein solcher Theil E (60) ist.

4) Zu den übriggebliebenen (1) Zehnern, die man in (10) Einer verwandelt, setze man die (5) Einer des Dividendus, und theile auch diese (15) Einer wieder in drey Theile; da dann ein solcher Theil F (5) ist.

Denn hiedurch hat man die Tausende, Hunderte, Zehner und Einer des Dividendus A, folglich den ganzen Dividendus A in die verlangten (3) Theile getheilt, deren jeder = C + D + E + F ist.

Zweyter Fall.

Wenn der Divisor mehr als eine Ziffer hat.

```
 D      A      Q
362) 1461394 | 4037
     1448
     ----
   B 1339
     1086
     ----
   C 2534
     2534
     ----
        0
```

Auflös. Die Art der Operation ist, wie beym ersten Falle; nur muß man hier bestimmen können, wie vielmal der zusammengesetzte Divisor D in dem ihm gemäßen Theile des Dividendus A, B, C, stecke. Dieses nun findet man auf folgende Art:

1) Man nehme an, der Divisor D stecke in dem zugehörigen Theile des Dividendus A so vielmal, als die höchste Ziffer des Divisors (3) in der höchsten, oder den beyden höchsten Ziffern (14) dieses Theils, nach dem ersten Falle.

2) Multiplicirt man den Divisor D mit der also gefundnen Zahl (4), und erhält ein Product (1448), welches sich wie bey A gehörig subtrahiren läßt; so ist die gefundene Zahl (4) der richtige Theil des Quotienten Q.

3) Ist aber solches Product zu groß, wie erfolgt, wenn man für B (4), und für C (8) in Q setzt; so

vermindre man eine solche Zahl immer um eine Einheit, bis man ein Product erhält, welches sich gehörig subtrahiren läßt. Auf diese Art ist der richtige Theil des Quotienten für B nicht 4, sondern 3, und für C nicht 8, sondern 7.

Beweis. Beruhet auf eben den Gründen wie beym ersten Falle.

Das II. Capitel.

Von den Brüchen, auch den Decimalbrüchen.

Erklärungen.

§. 59. Wird ein Ganzes in etliche gleiche Theile getheilt, und deren einige genommen: so heißt dieses Stück, in Vergleichung mit dem Ganzen, ein **Bruch**, fractio, der also das Vielfache eines gewissen Theils des Ganzen ist. Z. E. zwey Drittheile des Thalers heißt, man soll den dritten Theil des Thalers, oder die Größe, deren drey auf einen Thaler gehen, zweymal nehmen.

Anmerk. Ein Bruch heißt auch eine gebrochene Zahl im Gegensatz der ganzen Zahl. Bey dieser wird das Ganze oder die Einheit selbst, bey jener aber ein gewisser Theil des Ganzen oder der Einheit etlichemal genommen.

§. 60. Zu einem Bruche sind zwey Zahlen erforderlich, der **Nenner** und der **Zähler**. Jener zeigt an, in wie viel Theile das Ganze getheilt ist, dieser, wie vielmal ein solcher Theil genommen wird. Beyde heißen die **Glieder** des Bruchs, termini fractionis, und werden durch einen Strich abgesondert, so daß der

Zähler

Zähler über, der Nenner unter den Strich kömmt. Z. E. $\frac{2}{3}$, das ist, zwey Drittel. (Man schreibt auch manchmal 2/3.)

Anmerk. 1. Von den Gliedern eines Bruchs ist der Zähler die eigentliche Zahl, und der Nenner nur der Name. Dieser giebt dem Bruche den Namen, jener zählt die Menge der Theile, die ihn ausmachen. Wir nehmen aber Anfangs an, daß die Glieder des Bruchs ganze Zahlen sind. Ob solche auch Brüche seyn können, läßt sich erst im folgenden §. 89. bestimmen.

Anmerk. 2. Ein Bruch wird eine ganze Zahl, die seinem Zähler gleich ist, wenn man den Theil des Ganzen, den sein Nenner anzeigt, für die Einheit selbst nimmt. Z. E. 1 Gulden = $\frac{16}{24}$ rthl. = 16 ggr., weil $\frac{1}{24}$ rthl. = 1 ggr.

§. 61. Ein Bruch heißt **ächt**, fractio vera s. genuina, wenn der Zähler kleiner als der Nenner; **unächt**, spuria, wenn dieses nicht ist. Z. E. $\frac{2}{3}$ ist ächt, aber $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{3}$ rc. unächt.

Anmerk. Ist das Ganze in gewisse Theile getheilt: so steht es frey, einen solchen Theil so vielmal zu nehmen, daß solches entweder weniger, oder eben so viel, oder mehr als das Ganze ausmacht. Im ersten Falle ist der Bruch ein so grosses Stück des Ganzen, so ein großes Stück des Nenners der Zähler ist; im zweyten ist der Bruch das Ganze selbst, oder die Einheit; im dritten begreift der Bruch das Ganze, oder die Einheit, so vielmal, als der Nenner im Zähler enthalten ist, auch wohl noch ein Stück des Ganzen.

§. 62. Ein **eigentlicher Bruch** ist, dessen Zähler im Nenner nicht aufgeht; ein **uneigentlicher** aber, dessen Nenner im Zähler aufgeht. §. 24. Z. E. $\frac{1}{4}$ ist ein ächter und eigentlicher Bruch; $\frac{4}{4}$ oder $\frac{12}{4}$ ist ein unächter und uneigentlicher; $\frac{15}{4}$ ist ein unächter aber eigentlicher Bruch.

§. 63. Eine **gemischte Zahl** heißt, die aus einer ganzen Zahl und aus einem Bruche besteht. Z. E. $5\frac{2}{3}$, oder $5 + \frac{2}{3}$.

Grundlehren.

§. 64. Ein Bruch ist der Quotient, den der Zähler mit dem Nenner dividirt giebt.

Denn 1) ist der Bruch ächt: so enthält er das Ganze noch nicht einmal, sondern nur ein Stück des Ganzen, welches man findet, wenn man den Nenner, der das Ganze anzeigt, in seine Einheiten theilt, und frägt, wie vielmal ein solcher Theil des Ganzen in dem Zähler steckt, da denn der Quotient derselbe Bruch wird. Z. E. bey dem Bruche $\frac{2}{3}$ ist die größere Zahl 3 in der kleinern 2 nicht ein ganzes Mal enthalten; wohl aber $\frac{1}{3}$ der größern steckt in der kleinern 2 mal; daher man auch zu sagen pflegt, 3 in 2 ist $\frac{2}{3}$ mal enthalten, oder $3:2 = \frac{2}{3}$.

2) Ist der Bruch unächt: so enthält er das Ganze so vielmal, als der Nenner in dem Zähler steckt; da man denn, wenn er das Ganze ein- oder etlichemal und noch ein Stück darüber enthält, solches Stück nach dem ersten Falle ausdrücken kann. Z. E. $\frac{17}{3} = 17:3 = 5 + \frac{2}{3} = 5\frac{2}{3}$.

Anmerk. Man theilt eine Zahl, wenn man alle ihre Einheiten einzeln theilt, da denn die Summe solcher einzelnen Quotienten offenbar den gesuchten Quotienten giebt. Durch jede dieser Theilungen aber erhält man einen solchen Theil der Einheit, als der Divisor anzeigt, und es sind dieser Theile der Einheit so viele, als der Dividendus Einheiten hat. Dies giebt also einen Bruch, der den Dividendus zum Zähler und den Divisor zum Nenner hat, und dieser Bruch ist der gesuchte Quotient. Z. E. $3:5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

§. 65. Die Quotienten §. 23. lassen sich wie Brüche bezeichnen, auch, wenn der Divisor im Dividendus nicht

aufgeht,

aufgeht, §. 24. durch eine gemischte Zahl §. 63. ausdrücken. §. 64. So ist z. E. $17:3 = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$. Hiedurch ist §. 23. Anmerk. erfüllt.

Anmerk. 1. Mit einer ganzen Zahl dividiren heißt eben so viel, als in einen Bruch multipliciren, der diese Zahl zum Nenner und die Einheit zum Zähler hat. Z. E. $17:3 = \frac{17}{3} = 17 \cdot \frac{1}{3}$. Denn $\frac{1}{3}$ mal nehmen, heißt den dritten Theil nehmen.

Anmerk. 2. Jeder Bruch ist ein solcher Theil seines Zählers, als der Nenner anzeigt. Z. E. $\frac{17}{3}$ ist der dritte Theil von 17.

§. 66. Haben zwey Brüche einerley Nenner: so beruhet ihre Größe auf der Größe der Zähler; das ist, der Bruch ist um so viel größer, um so viel größer sein Zähler ist. Z. E. $\frac{12}{13}$ ist 4 mal größer als $\frac{3}{13}$. Denn beyde Brüche zählen einerley Theile des Ganzen, der erste aber 4 mal mehr solcher Theile.

§. 67. Haben zwey Brüche einerley Zähler: so beruhet ihre Größe auf der umgekehrten Größe der Nenner, das ist, der Bruch ist um so viel größer, um so viel kleiner sein Nenner ist. Z. E. $\frac{3}{5}$ ist 4 mal grösser als $\frac{3}{20}$; denn beyde Brüche zählen gleich viel Theile, der erste aber 4 mal größere Theile.

§. 68. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man mit dieser Zahl entweder blos seinen Zähler multiplicirt, oder blos seinen Nenner dividirt. §. 66. 67. Z. E. $\frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{6} = \frac{5}{6:3}$.

Anmerk. Demnach ist $(5\frac{2}{7}) \cdot 3$ oder $(5 + \frac{2}{7}) \cdot 3 = 5 \cdot 3 + 2$, welches bey §. 65. zu gebrauchen.

§. 69. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man mit dieser Zahl entweder blos seinen Zähler dividirt, oder blos seinen Nenner multiplicirt. §. 66. 67. Z. E. $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6:3}{7} = \frac{6}{7 \cdot 3}$.

§. 70. Die Größe eines Bruchs bleibt ungeändert, wenn man beyde Glieder des Bruchs zugleich mit einerley ganzen Zahl entweder multiplicirt, oder dividirt. §. 68. 69. vergl. §. 41. Z. E. $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$; und $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$. Denn im ersten Exempel hat $\frac{8}{12}$ 4 mal kleinere Theile, aber auch dafür 4 mal mehr solcher Theile; im zweyten hat $\frac{3}{4}$ nur halb so viel Theile; aber dafür sind auch die Theile doppelt so groß.

Anmerk. Jeder Bruch, so wie auch jede ganze Zahl, lassen sich auf unzählig viele Arten ausdrücken. Z. E. $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3}$ u. s. w.

§. 71. Die Sätze §. 66 bis 70 gelten auch von der Division zweyer ganzen Zahlen, wenn man darinn **Quotient** für Bruch, **Dividendus** für Zähler und **Divisor** für Nenner setzt. §. 64. Auch gelten die Sätze §. 64 bis 70, wenn man statt der ganzen Zahlen Brüche setzt, wie im folgenden §. 89. 92 - 94. bewiesen wird.

Die 1ste Aufgabe.

§. 72. Einen Bruch aufzuheben, das ist, die Glieder des Bruchs, seiner Größe unbeschadet, durch kleinere Zahlen auszudrücken.

Auflös. Man dividire beyde Glieder des Bruchs mit einer Zahl, die in beyden aufgehet: so erhält man kleinere Zahlen, und die Größe des Bruchs bleibt ungeändert. §. 70. Z. E. $\frac{8}{56} = \frac{8:8}{56:8} = \frac{1}{7}$; und $\frac{189}{301} = \frac{189:7}{301:7} = \frac{27}{43}$.

Auch ist es bequem, wenn man die Glieder des Bruchs in ihre Factoren zerfällt, und die gemeinschaftlichen ausstreicht, welches auf eben den Gründen beruhet. Z. E. $\frac{45}{360} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{1}{4 \cdot 2}$.

Hiezu

Hiezu hat man auch bereits berechnete Factoren-Tafeln, die man in verschiednen Sammlungen mathematischer Tafeln findet. Z. E. Vega logarithmische und andere Tafeln. Wien 1783. 8.

Anmerk. Die zum Aufheben der Brüche nöthige Theorie von den Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen kann erst mit Hülfe der Buchstabenrechnung vollständig gelehrt werden.

§. 73. Zusatz. Hat eins der beyden Glieder keinen andern Factor, als die Einheit (absolute Primzahl, numerus primus,) oder haben beyde keinen gemeinschaftlichen Factor (relative Primzahlen, numeri primi inter se): so geht das Aufheben nicht an, weil sonst die Glieder nicht ganze Zahlen bleiben. Z. E. $\frac{19}{24} = \frac{2\frac{3}{8}}{3}$ und $\frac{3}{11} = \frac{\frac{3}{4}}{2\frac{3}{4}}$. Von dergleichen Brüchen und ihrer Bedeutung siehe §. 90.

Die 2te Aufgabe.

§. 74. Zwey oder mehrere Brüche gleichnamig zu machen, oder unter einerley Benennung zu bringen, das ist, zu machen, daß sie, ihrer Größe unbeschadet, einen gemeinschaftlichen Nenner haben.

Auflös. Beyde Glieder eines jeden Bruchs multiplicire man mit dem Nenner des andern, oder wenn mehr als zwey Brüche gegeben sind, mit dem Producte aus den Nennern der übrigen Brüche. Z. E. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ geben $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4}$, $\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3}$, das ist, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$. Und $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ geben $\frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 5}$, $\frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 5}$, $\frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 3 \cdot 4}$, das ist, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$.

Beweis. Durch solche Multiplication bleibt die Größe der Brüche ungeändert, §. 70, und wird ein

gemeinschaftlicher Nenner gemacht, der das Product aus allen Nennern der gegebenen Brüche ist. §. 32. 20.

Die 3te Aufgabe.

§. 75. **Brüche zu einander addiren, oder von einander zu subtrahiren.**

Auflös. Sind die gegebenen Brüche gleichnamig, oder nach §. 74 gleichnamig gemacht: so wird ihre Summe oder Differenz ein Bruch, dessen Nenner der gemeinschaftliche Nenner, und dessen Zähler die Summe oder Differenz jener Zähler ist. §. 60. Z. E. $\frac{7}{8} + \frac{4}{5} = \frac{35}{40} + \frac{32}{40} = \frac{35+32}{40} = \frac{67}{40}$, und $\frac{7}{8} - \frac{4}{5} = \frac{35}{40} - \frac{32}{40} = \frac{35-32}{40} = \frac{3}{40}$.

§. 76. **Zusatz 1.** Eine gemischte Zahl $5\frac{3}{4}$ verwandelt man in den unächten Bruch $\frac{23}{4}$, dessen Nenner der vorhandene Nenner ist, und dessen Zähler erhalten wird, wenn man die ganze Zahl mit solchem Nenner multiplicirt, und zu dem Producte den vorhandenen Zähler addirt. Denn es ist $5 + \frac{3}{4} = \frac{5}{1} + \frac{3}{4} = \frac{20}{4} + \frac{3}{4} = \frac{23}{4}$.

§. 77. **Zusatz 2.** Sind mit den Brüchen auch zugleich ganze oder gemischte Zahlen gegeben: so verwandle man solche in Brüche, oder berechne ihre Theile besonders. So ist z. E. $7\frac{3}{4} + 2\frac{2}{3} = \frac{31}{4} + \frac{8}{3}$. Oder $7\frac{3}{4} + 2\frac{2}{3} = 7 + 2 + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = 9 + \frac{17}{12} = 10\frac{5}{12}$, und $7\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} = 7 - 2 + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = 5\frac{1}{12}$.

Die 4te Aufgabe.

§. 78. **Brüche mit einander zu multipliciren.**

Auflös. Das Product der gegebenen Brüche ist ein Bruch, dessen Zähler das Product der gegebenen Zähler, und dessen Nenner das Product der gegebenen Nenner

ner ist. Oder: man multiplicire Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner. Z. E. $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 4}$.

Beweis. Einen Bruch mit einem Bruche multipliciren heißt offenbar vom erstern ein solches Stück nehmen, als letzterer anzeigt. Hiezu muß man den ersten Bruch in so viel Theile theilen, als der Nenner des zweyten anzeigt, und von diesen Theilen so viele nehmen, als der Zähler des zweyten Bruchs anzeigt. Ersteres giebt das Product aus den Nennern zum Nenner, §. 69. und letzteres das Product aus den Zählern zum Zähler. §. 68.

Anderer Beweis. Der Multiplicans ist um so vielmal kleiner als sein Zähler, so viel Einheiten sein Nenner hat. §. 65. Multiplicirt man also mit dem Zähler des Multiplicans: so ist §. 34. das Product um so vielmal grösser als es seyn sollte, als der Nenner des Multiplicans Einheiten hat, und muß daher mit diesem Nenner dividirt werden. Ersteres giebt das Product der Zähler §. 68; letzteres das Product der Nenner §. 69.

§. 79. Zusatz. 1) Mit einem Bruche multipliciren heißt überhaupt mit seinem Nenner dividiren, und mit seinem Zähler multipliciren. Z. E. $9 \cdot \frac{2}{3}$ heißt $\frac{2}{3}$ von 9 nehmen, das ist, 9 in 3 gleiche Theile theilen, und davon 2 nehmen, oder $(9:3) \cdot 2$.

§. 80. Zusatz. 2) Bey Brüchen, so wie §. 32 bey ganzen Zahlen, geben einerley Factoren, auch mit veränderter Ordnung einerley Product, weil sich in beyden Gliedern des Products die Factoren versetzen lassen. Z. E. $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$. Bey Brüchen, wie §. 73, bleibt eben der Beweis.

§. 81.

§. 81. Zusatz. 3) Bey Brüchen, so wie §. 31 bey ganzen Zahlen, ist jeder Factor im Producte so vielmal enthalten, als die Einheit in dem andern. Denn das Product enthält einen solchen Theil von dem neuen Factor, als der andere von der Einheit. Z. E. $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{15}$, wo der eine Factor die Einheit $\frac{2}{3}$ mal, und das Product $\frac{8}{15}$ den andern Factor $\frac{4}{5}$ auch $\frac{2}{3}$ mal enthält.

§. 82. Zusatz. 4) Ist der Multiplicans ein ächter Bruch: so ist das Product kleiner als der Multiplicandus. Sind beyde Factoren ächte Brüche: so ist das Product kleiner, als jeder Factor.

§. 83. Anmerk. Gemischte Zahlen verwandelt man vorher in unächte Brüche, §. 76. z. E. $4\frac{2}{3}\cdot 2\frac{3}{4} = \frac{14}{3}\cdot\frac{11}{4}$; auch siehet man leicht aus §. 79, was für vortheilhafte Abkürzungen sich nach §. 68. 69. machen lassen. Z. E. $\frac{9}{14}\cdot\frac{2}{3} = \frac{9}{14}\cdot 3\cdot 2 = \frac{9\cdot 3}{14\ 2} = \frac{3}{7}$. So auch $\frac{10}{11}\cdot\frac{2}{5} = \frac{10}{11}:5\cdot 2 = \frac{10:5\ 2}{11} = \frac{4}{11}$. So auch $\frac{33}{35}\cdot\frac{7}{8} = \frac{33}{35}:8\cdot 7 = \frac{33}{35\cdot 7\cdot 8} = \frac{33}{40}$ u. s. w.

Die 5te Aufgabe.

§. 84. Brüche mit einander zu dividiren.

Auflös. Man multiplicire nach §. 78. den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor. Z. E. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4} = \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{3} = \frac{5\cdot 4}{6\cdot 3}$.

Beweis. Einen Bruch mit einem andern Bruche dividiren heißt offenbar finden, wie vielmal der zweyte Bruch in dem ersten steckt. Hätten nun beyde einerley Nenner, so dürfte man nur finden, wie vielmal der Zähler des zweyten in dem Zähler des ersten steckt. §. 60. Haben sie also verschiedene Nenner, und man bringt sie unter einerley Benennung: so ist der Dividendus das Product des ersten Zählers in den zweyten Nenner,

Nenner, und der Divisor das Product des ersten Nenners in den zweyten Zähler.

Anderer Beweis. Der Divisor ist um so vielmal kleiner, als sein Zähler, so viel Einheiten sein Nenner hat, §. 65, und steckt also gerade um so vielmal mehr im Dividendus, als sein Zähler, daher man den Quotienten, den der Zähler §. 69 gegeben hat, mit dem Nenner §. 68 multipliciren muß.

§. 85. Zusatz 1. Mit einem Bruche dividiren heißt überhaupt mit seinem Zähler dividiren, und mit seinem Nenner multipliciren. Z. E. $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{5}{6} : 3 . 4$, und $9 : \frac{2}{3} = 9 : 2 . 3$.

Anmerk. Die Division mit einem Bruche giebt oft große Zahlen, weil ein Bruch in einer andern Zahl vielmal enthalten seyn kann.

§. 86. Zusatz 2. Von Brüchen gilt, was §. 37. 38. von ganzen Zahlen: der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt giebt den Dividendus; und ein Product mit dem einen Factor dividirt giebt den andern. Denn $(\frac{5}{6} : \frac{3}{4}) . \frac{3}{4} = \frac{5}{6} . \frac{4}{3} . \frac{3}{4} = \frac{5}{6} . 1$, und $(\frac{4}{5} . \frac{2}{3}) : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} . \frac{2}{3} . \frac{3}{2} = \frac{4}{5} . 1$.

§. 87. Zusatz 3. Von Brüchen gilt, was §. 39. von ganzen Zahlen: der Divisor steckt im Dividendus so vielmal, als die Einheit im Quotienten §. 81.

§. 88. Anmerk. Gemischte Zahlen verwandelt man vorher in unächte Brüche, §. 76. z. E. $7\frac{3}{4} : 5\frac{2}{3} = \frac{31}{4} : \frac{17}{3} = \frac{31}{4} . \frac{3}{17}$; auch lassen sich hier wie §. 83 oft vortheilhafte Abkürzungen nach §. 85 anbringen. Z. E. $\frac{21}{32} : \frac{3}{8} = \frac{21}{32} : 3 . 8 = \frac{21 : 3}{32 . 8} = \frac{7}{4}$. So auch $\frac{12}{17} : \frac{4}{9} = \frac{12}{17} : 4 . 9 = \frac{12 : 4 . 9}{17} = \frac{27}{17}$. So auch $\frac{17}{24} : \frac{5}{8} = \frac{17}{24} . 8 : 5 = \frac{17}{24 : 8 . 5} = \frac{17}{15}$ u. s. w.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 89. Bey Brüchen, so wie §. 64. bey ganzen Zahlen, kann die Division als ein Bruch angesehen und bezeichnet werden.

Beweis. Dividirt man einen Bruch $\frac{7}{2}$ mit einer ganzen Zahl 5: so nimmt man den Theil von ihm, den die ganze Zahl anzeigt, das ist, man erhält einen Bruch $\frac{\frac{7}{2}}{5}$, dessen Nenner die ganze Zahl, und dessen Zähler der zu dividirende Bruch ist. Sollte aber der vorige Bruch mit $\frac{5}{8}$ dividirt werden: so müßte der nunmehrige Quotient so vielmal größer werden, so vielmal der nunmehrige Divisor $\frac{5}{8}$ kleiner ist, als der vorige 5, hier 8 mal. §. 65. Nun wird der vorige Quotient $\frac{\frac{7}{2}}{5}$ 8 mal größer, wenn man seinen Nenner 8 mal kleiner macht, §. 68. das ist, wenn $\frac{5}{8}$ anstatt der vorigen 5 kömmt. Demnach ist der nunmehrige Quotient $\frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{7}{2} : \frac{5}{8}$.

§. 90. Anmerk. Von der Bedeutung der Brüche, dergleichen §. 89. 73. geben, ist folgendes zu merken:

1) Der Bruch $\frac{\frac{11}{4}}{3}$ oder $\frac{2\frac{3}{4}}{3}$ bedeutet, daß man eine Größe, wovon 3 auf das Ganze gehen, 2 mal und noch $\frac{3}{4}$ derselben nehmen solle. §. 59. Es ist nemlich, wenn das Ganze ein Thaler, $\frac{2\frac{3}{4}}{3}$ rthl. = 16ggr. + 6ggr. = 22ggr.

2) Der Bruch $\frac{\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}}$ oder $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$ bedeutet, daß man $\frac{1}{2}$ von der Größe, wovon $1\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ das Ganze ausmachen, nehmen solle. §. 59. Es ist nämlich, wenn das Ganze ein Thaler, $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$ rthl. = $\frac{1}{2}$ fl. = 8 ggr.

§. 91. Zusatz 1. Ein Bruch, dessen Glieder Brüche sind, läßt sich allemal auch so ausdrücken, daß die Glieder ganze Zahlen werden, wodurch er verständlicher und bequemer wird. Denn ein solcher Bruch ist der Quotient, den der Zähler mit dem Nenner dividirt giebt. §. 89. Z. E. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{11}{4}} = \frac{2}{3} : \frac{11}{4} = \frac{2}{3} . \frac{4}{11} = \frac{8}{33}$. So auch $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{1}{2} . \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

§. 92. Zusatz 2. Mit einem Bruche $\frac{3}{4}$, so wie §. 65. mit einer ganzen Zahl, dividiren, heißt in einem Bruch $\frac{1}{\frac{3}{4}}$ multipliciren, dessen Zähler Eins, der Nenner aber dieser Bruch ist. Denn $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{1} : \frac{3}{4} = \frac{1}{1} . \frac{4}{3}$. Demnach ist $5 . \frac{1}{\frac{3}{4}} = 5 : \frac{3}{4}$.

Lehrsatz.

§. 93. Ein Bruch $\frac{2}{3}$ wird mit einem Bruche $\frac{4}{5}$, so wie §. 68. mit einer ganzen Zahl, multiplicirt, wenn man entweder seinen Zähler damit multiplicirt, oder seinen Nenner damit dividirt. Und ein Bruch $\frac{2}{3}$ wird mit einem Bruche $\frac{4}{5}$, so wie §. 69. mit einer ganzen Zahl, dividirt, wenn man entweder seinen Zähler damit dividirt, oder seinen Nenner damit multiplicirt.

Beweis. 1) $\frac{2 . \frac{4}{5}}{3} = \frac{2 . 4 . \frac{1}{5}}{3} = \frac{2 . 4 : 5}{3} = \frac{2 . 4}{3} : 5 = \frac{2 . 4}{3 . 5} = \frac{2}{3} . \frac{4}{5}$.

2)

2) $\frac{2}{3:\frac{4}{5}} = \frac{2}{3\cdot\frac{5}{4}} = \frac{2}{3:5\cdot\frac{1}{4}} = \frac{2}{3\cdot 5:4} = \frac{2}{3\cdot 5}$
$\cdot 4 = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}.$

3) $\frac{2:\frac{4}{5}}{3} = \frac{2\cdot\frac{5}{4}}{3} = \frac{2\cdot 5:4}{3} = \frac{2\cdot 5}{3}:4 = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}$
$= \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4} = \frac{2}{3}:\frac{4}{5}.$

4) $\frac{2}{3\cdot\frac{4}{5}} = \frac{2}{3\cdot 4:5} = \frac{2}{3\cdot 4}\cdot 5 = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}$
$= \frac{2}{3}:\frac{4}{5}.$

§. 94. Zusatz. Die Größe eines Bruchs bleibt ungeändert, wenn man seine beyden Glieder zugleich mit einerley Bruch, so wie §. 70. mit einerley ganzen Zahl, entweder multiplicirt, oder dividirt.

Wahlsatz.

§. 95. So wie man §. 43. aus der primitiven Einheit durch das fortgesetzte Decupliren (Multiplication mit Zehn) die Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. erhält, welche eine von der Rechten gegen die Linke aufsteigende Reihe bilden: so kann man in entgegengesetzter Ordnung aus der primitiven Einheit durch das fortgesetzte Subdecupliren (Division mit Zehn) die Zehntel, Hundertel, Tausendtel u. s. w. erhalten, welche eine von der Linken gegen die Rechte absteigende Reihe bilden, und Decimalbrüche heißen, die man durch ein Comma (das Decimalzeichen) von den ganzen Decimalzahlen absöndert. Z. E. 384,725 heißt $3\cdot 100 + 8\cdot 10 + 4 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$, oder $384\frac{725}{1000}$, oder $\frac{384725}{1000}$. Und

0,437 heißt $\frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{7}{1000}$ oder $\frac{437}{1000}$. Desgleichen 0,0075 heißt $\frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{5}{10000}$ oder $\frac{75}{10000}$. §. 75. 76.

§. 96. Zusatz 1. Hiedurch erhalten die Milliontel die sechste Stelle nach den Einern; die Billiontel die zwölfte, die Trilliontel die achtzehnte, und so immer um sechs Stellen weiter; bey allen Stellen aber hat von der Rechten gegen die Linke jede folgende den zehnfachen Werth der zunächst vorhergehenden, $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$; alles wie §. 46.

§. 97. Zusatz 2. Ist bey einer Zahl die Stelle der Einer durch das Comma bezeichnet; so kann man solcher Zahl so viel Nullen, als man will, zur Rechten und Linken anhängen, ohne daß dadurch ihr Werth geändert werde; versetzt man aber das Comma nach der Rechten oder Linken um eine oder mehrere Stellen; so wird für jede solche Stelle die Zahl im ersten Falle decuplirt, im zweyten subdecuplirt. Z. E. 876,432 . 10 = 8764,32, und 876,432 . 100 = 87643,2 u. s. w. 876,432 : 10 = 87,6432, und 876,432 : 100 = 8,76432 u. s. w. folglich auch 3,75 . 10000 = 3,7500 . 10000 = 37500, und 3,75 : 10000 = 00003,75 : 10000 = 0,000375. §. 45.

Die 6ste Aufgabe.

§. 98. Die Addition und Subtraction in Decimalbrüchen zu verrichten.

Auflös. Man beobachte dieselben Regeln, welche §. 53. 54. für ganze Zahlen vorgeschrieben sind, weil hier eben die Gesetze der Numeration statt finden, worauf sich diese Regeln gründen. Z. E.

35,709	7 + 4,0654 d. i. 7,0000
0,086	4,0654
35,795 Summe.	Summe 11,0654
35,623 Differenz.	Differenz 2,9346

Die 7te Aufgabe.

§. 99. Die Multiplication in Decimalbrüchen zu verrichten.

Auflös. Man verrichte die Multiplication, als wären die gegebenen Factoren ganze Zahlen, und schneide in dem gefundenen Producte, von der Rechten gegen die Linke, durch das Comma so viel Stellen ab, als in den Factoren zusammen dadurch abgeschnitten sind. Z. E.

8,765	37,84	5,386
4	0,03	0,00023
35,060	1,1352	16158
		10772
		0,00123878

Beweis. Macht man bey dieser Operation die gegebenen Brüche zu ganzen Zahlen: so ist jeder Factor um so viel höher gemacht, als die durch das Comma abgeschnittenen Stellen betragen, §. 97; folglich §. 35. das gefundene Product um so vielmal höher, als die durch das Comma abgeschnittenen Stellen in beyden Factoren zusammen betragen, und muß daher wieder um so viel erniedrigt werden, welches §. 97. geschieht, wenn man von der Rechten zur Linken eben so viel Stellen durch das Comma abschneidet.

§. 100. Zusatz. Fängt man mit der höchsten Ziffer im Multiplicans an, und bestimmt nach §. 99. den Werth des ersten Products A: so bestimmt sich durch die Decimalordnung der jedesmalige Werth der folgenden Producte BC von selbst, wie beygesetztes Exempel deutlich zeigt, wo die niedrigste Ziffer jedes folgenden Products immer um eine Stelle weiter nach der Rechten gesetzt ist, so wie es die Decimalordnung erfodert.

0,426	
0,243	
0,0852	A
1704	B
1278	C
0,103518	

§. 101. Anmerk. Für Decimalbrüche giebt es auch eine abgekürzte Multiplication, multiplicatio contracta, welche darin besteht, daß man bey der Operation §. 100, so wie man weiter rückt, im Multiplicandus immer nach der Reihe eine Ziffer von neuem übergeht, wie nachfolgendes Exempel deutlich zeigt, wo A mit B multiplicirt das Product P giebt.

A	0,7142857	. . . .
B	0,4285714	. . . .
	0,28571428	
	1428570	
	571424	
	35710	
	4998	
	71	
	28	
P	0,30612229	

Nemlich hier ist nach §. 100 mit der höchsten Ziffer im Multiplicans der Anfang gemacht, und der Werth des ersten Products nach §. 99 bestimmt worden. Bey der zweyten Ziffer im Multiplicans ist die letzte Ziffer im Multiplicandus übergangen; bey der dritten die vorletzte u. s. f.; daher denn die niedrigste Ziffer aller folgenden Producte unter die niedrigste Ziffer des ersten Products zu stehen kommt. §. 100.

In der Summe aller dieser Producte, oder in dem gesammten Producte P, sind höchstens die beyden letzten Ziffern

fern unrichtig. Denn die letzte Ziffer ist offenbar wegen der zur Rechten weggelassenen Classe zu klein. Würde sie vollständig gemacht: so würde vielleicht auch die vorletzte Ziffer um eine Einheit größer werden. Alle übrige Ziffern des gefundenen Products sind zuverläßig.

Die 8te Aufgabe.

§. 102. Die Division in Decimalbrüchen zu verrichten.

Auflös. 1. Man dividire, als hätte man ganze Zahlen; so findet man auch den Quotienten Q in ganzen Zahlen. Nun ist die Anzahl der durch das Comma abgeschnittnen Stellen im Dividendus und Divisor entweder gleich oder ungleich. Im ersten Falle ist Q der gesuchte Quotient; im zweyten Falle aber werden in Q von der Rechten zur Linken so viel Stellen durch das Comma abgeschnitten, als der Dividendus Ueberschuß hat; oder so viel Nullen zur Rechten angehängt, als der Divisor Ueberschuß hat. Z. E. $\frac{0{,}579}{0{,}003} = 193$; $\frac{0{,}579}{3} = 0{,}193$; $\frac{0{,}579}{0{,}3} = 1{,}93$; $\frac{0{,}579}{0{,}00003} = 19300$.

2) Bleibt bey obiger Division ein Rest: so füge man demselben eine Null bey, setze die Operation fort, und wiederhole dieses, bis kein Rest mehr vorhanden, oder der Quotient genau ist. Z. E. 0,581 mit 3 dividirt giebt den Quotient 0,193 und den Rest 2, welcher nach Beyfügung

$$
\begin{array}{r|l}
3)\ 0{,}581 & 0{,}19366\ \ldots \\
3 & \quad Q \\
\hline
28 & \\
27 & \\
\hline
11 & \\
9 & \\
\hline
20 & \\
18 & \\
\hline
20 & \\
18 & \\
\hline
2\ \text{u. s. w.} &
\end{array}
$$

gung der Null, die Ziffer 6 zum Quotienten bringt, und wieder einen Rest 2 läßt, den man eben so behandeln kann. Hiebey sieht man sogleich, daß die Rechnung ohne Ende auf einerley Art fortgeht.

Beweis. 1) Sind blos im **Dividendus** Stellen abgeschnitten, und man macht denselben zu einer ganzen Zahl: so wird er, folglich auch der Quotient, um so vielmal decuplirt, weil der Divisor in einer 10, 100 ꝛc. mal größern Zahl, auch 10, 100 ꝛc. mal mehr steckt; daher der Quotient wieder eben so vielmal subdecuplirt werden muß. Setzt man z. E. $\frac{579}{3}$ anstatt $0,\frac{579}{3}$: so ist der Quotient (193) 1000 mal größer, als er seyn sollte, und muß daher 1000 mal kleiner gemacht werden, wodurch er 0,193 wird. Sind blos im **Divisor** Stellen abgeschnitten, und man macht denselben zu einer ganzen Zahl: so wird er um so vielmal decuplirt, als Stellen vorhanden sind, aber der Quotient um so vielmal subdekuplirt, weil eine 10, 100 ꝛc. größere Zahl auch 10, 100 ꝛc. mal weniger im Dividendus steckt, daher der Quotient wieder eben so vielmal decuplirt werden muß. Sind daher im **Dividendus** und **Divisor** Stellen abgeschnitten: so muß in dem gefundenen Quotienten das Comma um so viel Stellen nach der Linken, als der Dividendus hat, und wieder nach der Rechten, als der Divisor hat; wodurch sich eins gegen das andere entweder ganz oder zum Theil aufhebt.

2) Die Richtigkeit der Behandlung des etwa gebliebenen Restes erhellet, wenn man gleich Anfangs dem Dividendus, nach Bezeichnung der Einer, eine be-

liebige Anzahl Nullen anhängt, als wodurch sein Werth nicht geändert wird. §. 97.

Andere Auflös. Im Dividendus und Divisor mache man durch Hülfe der Null die Anzahl der abgeschnittenen Stellen gleich, und erhebe beyde zu ganzen Zahlen, §. 70; da denn der Quotient jedesmal eine ganze Zahl wird. Ist hiebey ein Rest geblieben; so verfahre man damit nach obiger Vorschrift, wo sich im Quotienten der Werth der Ziffern nach dem Comma von selbst bestimmt. Z. E. $\frac{0,579}{0,00003} = \frac{0,57900}{0,00003} = \frac{57900}{3} = 19300$, und $\frac{0,579}{0,3} = \frac{0,579}{0,300} = \frac{579}{300} = 1,93$.

§. 103. Zusatz 1. Hieraus erhellet, wie man auch bey der Division in ganzen Zahlen, wenn ein Rest bleibt, den Quotienten in Decimalbrüchen darstellen, desgleichen, wie man jeden Bruch in einen Decimalbruch verwandeln könne. Z. E. $\frac{3}{4} = 0,75$. vergl. §. 64.

§. 104. Zusatz 2. Man findet bey dieser Division zwar nicht immer den genauen Quotienten, kann sich ihm aber, so weit man will, nähern, wenn man annimmt, daß sich die Einheit ohne Ende fort theilen lasse. Z. E. $\frac{0,581}{3} = 0,193666$ ....

§. 105. Anmerk. Eine ähnliche Bewandniß, wie §. 101 bey der Multiplication, hat es auch mit der Division, wobey der Werth des ersten Theils im Quotienten nach den ersten Ziffern im Dividendus und Divisor §. 102 bestimmt, und der vollständige Divisor in den ersten Theil des Quotienten multiplicirt ist. Bey dem zweyten Theile des Quotienten aber ist die letzte Ziffer im Divisor übergangen; bey dem dritten die vorletzte u. s. f. wie man aus folgendem Beyspiele leicht sehen kann:

0,4284714

```
0,428,5714 . . . . ) 0,30612229 | 0,7142857
                     29999998
                     --------
                       612231
                       428571
                     --------
                       183660
                       171428
                     --------
                        12232
                         8570
                     --------
                         3662
                         3424
                     --------
                          238
                          210
                     --------
                           28
                           28
                     --------
                            0
```

Das III. Capitel.

Von den Potenzen und Wurzeln der Zahlen.

Erklärungen.

§. 106. Jede Zahl, die ein Product aus lauter gleichen Factoren ist, heißt eine **Potenz** oder **Dignität** eines dieser Factoren, und solcher Factor die **Wurzel** aus dieser Potenz.

Z. E. 9 = 3 . 3, oder 27 = 3 . 3 . 3, oder 81 = 3 . 3 . 3 . 3 u. s. w. ist eine **Potenz** der Zahl 3, welche in dieser Rücksicht die **Wurzel** aus 9, oder 27, oder 81 u. s. w. heißt.

§. 107. Bey jeder Potenz heißt die Menge der gleichen Factoren der **Grad** oder die **Dimension** der Po-

tenz, und eine Zahl, welche diesen Grad anzeigt, der Exponent der Potenz. Der Wurzel aus solcher Potenz kömmt alsdann derselbe Grad, also derselbe Exponent zu.

Z. E. 81 = 3 . 3 . 3 . 3 ist eine Potenz des vierten Grades von der Zahl 3, und 3 eine Wurzel des vierten Grades aus der Zahl 81; also der Exponent der Potenz und der Wurzel die Zahl 4.

Anmerk. 1. Man bezeichnet die Potenz einer Zahl, wenn man dieser Zahl den Exponenten der Potenz oben zur Rechten beyfügt; und die Wurzel aus einer Zahl, wenn man dieser Zahl das Wurzelzeichen ($\sqrt{}$) vorsetzt, und den Exponenten der Wurzel, wenn er über 2 ist, in die Oefnung des Wurzelzeichens schreibt.

So ist z. E. $9 = 3^2$; $27 = 3^3$; $81 = 3^4$ u. s. w. und $3 = \sqrt{9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[4]{81}$ u. s. w.

Anmerk. 2. Die Potenzen sowohl als die Wurzeln werden allgemein nach ihren Exponenten benennt, §. 2. doch führen die erstern Grade auch noch eigne Namen. Es heißt nemlich die zweyte Potenz die Quadratzahl oder das Quadrat, die dritte die Cubikzahl oder der Cubus, die vierte die Biquadratzahl oder das Biquadrat. Und hiernach wird auch die zweyte, dritte, vierte Wurzel die Quadrat- Cubik- Biquadratwurzel genannt.

§. 108. Eine Zahl zu der verlangten **Potenz erheben** heißt die Zahl so vielmal mit sich selbst multipliciren, als der vorgeschriebene Exponent anzeigt. Aus einer Zahl die verlangte **Wurzel ziehen (extrahiren)** heißt, eine Zahl finden, die zu der Potenz des vorgeschriebenen Exponenten erhoben der gegebenen Zahl gleich ist.

So ist z. E. $3^4 = 3 . 3 . 3 . 3 = 81$; und $\sqrt[4]{81} = 3$, weil $3^4 = 81$.

Grund-

Grundlehren.

§. 109. Jede folgende Potenz einer Zahl entsteht, wenn man ihre nächst vorhergehende Potenz mit solcher Zahl, oder mit der Wurzel, multiplicirt.

§. 110. Sind zwey Zahlen einander gleich: so sind ihre Potenzen, oder ihre Wurzeln, von gleichen Exponenten, auch einander gleich.

§. 111. Die Potenz eines Bruchs ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner dieselbe Potenz des gegebenen Zählers und Nenners ist. So ist z. E. $(\frac{4}{5})^3$ $= \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{4^3}{5^3}$.

§. 112. Die Wurzel aus einem Bruche ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner dieselbe Wurzel aus dem gegebenen Zähler und Nenner ist. So ist z. E. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$, weil $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$.

Anmerk. Da die Glieder eines jeden Bruchs ganze Zahlen sind, §. 60. oder doch darauf gebracht werden können: §. 91. so kömmt hiebey alles auf die ganzen Zahlen an.

§. 113. Die Potenz einer ganzen Zahl ist eine ganze Zahl, und die Potenz eines eigentlichen Bruchs ist ein eigentlicher Bruch.

Denn 1) multiplicirt man eine ganze Zahl in eine ganze Zahl: so muß das Product offenbar eine ganze Zahl seyn. 2) multiplicirt man einen ächten Bruch in einen ächten Bruch: so ist das Product kleiner als solcher Bruch, der schon kleiner als die Einheit ist, und kann also keine ganze Zahl seyn. 3) Hat man einen unächten, aber eigentlichen Bruch $(\frac{21}{15})$: so hebe man denselben auf $(\frac{7}{5})$, daß seine Glieder relative Primzah-

len werden, §. 73. wofern sie es nicht schon sind. Macht man nun von einem solchen Bruche eine Potenz, z. E. das Quadrat ($\frac{7 \cdot 7}{5 \cdot 5}$): so sind beyde Glieder desselben Producte aus relativen Primzahlen, und lassen sich also nicht gegen einander aufheben, §. 72. welches geschehen müßte, wenn das Quadrat von $\frac{7}{5}$ eine ganze Zahl seyn sollte. Ist aber die Potenz von $\frac{7}{5}$ keine ganze Zahl: so ist es auch nicht die Potenz von $\frac{21}{15}$ oder von $\frac{3 \cdot 7}{3 \cdot 5}$.

Anmerk. Der allgemeine Beweis des Satzes kann erst mit Hülfe der Buchstabenrechnung vollständig geführt werden.

Die 1ste Aufgabe.

§. 114. Die Potenzen aller Zahlen, die blos mit einer Ziffer geschrieben werden, oder das Wurzeltäflein, zu machen.

Auflös. Die Quadrate der einzelnen Ziffern giebt das Einmaleins, und es lassen sich hieraus §. 109 die folgenden Potenzen machen. Daher entsteht folgendes Wurzeltäflein:

Wurzel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
Biquadrat	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000

§. 115. Zusatz 1. Sind einer Ziffer zur Rechten Nullen beygefügt: so ist ihre Potenz die Potenz der Ziffer mit einem so vielfachen der Nullen, als der Exponent anzeigt. So ist z. E. $4^3 = 64$, und $400^3 = 64000000$. §. 56.

§. 116. Zusatz 2. Bey einer Decimalzahl von mehrern Ziffern kann man jede Ziffer einer höhern

Ordnung

Ordnung als das Product der Ziffer in die Potenz der Zehne, deren Exponent die Zahl solcher Ordnung ist, ansehen. So ist z. E. $3456 = 3 . 10^3 + 4 . 10^2 + 5 . 10^1 + 6.$

Auf ähnliche Art ist $0,3456 = 3 . \frac{1}{10} + 4 . \frac{1}{10^2} + 5 . \frac{1}{10^3} + 6 . \frac{1}{10^4}.$

Die 2te Aufgabe.

§. 117. Aus einer ganzen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflös. I. Fall. Wenn die gegebene Zahl nur eine oder zwey Ziffern hat: so findet man die Wurzel in dem Wurzeltäflein §. 114 entweder genau, oder doch zwey Zahlen, zwischen die solche Wurzel fällt. z. E. $\sqrt{49}$ ist 7, und $\sqrt{52}$ fällt zwischen 7 und 8.

	42	25	65
	36		
12)	6	25	
	6	25	
		0	

II. Fall. Wenn die gegebene Zahl drey bis vier Ziffern hat: so theile man sie von der Rechten gegen die Linke in Classen zu zwey Ziffern, wenn auch die zur Linken nur eine erhielte, und verfahre alsdann auf folgende Art.

1) Man nehme aus dem Wurzeltäflein §. 114 eine Quadratzahl, 36, die so groß oder zunächst kleiner ist, als die Classe zur Linken, und bemerke ihre Wurzel 6, als den ersten Theil der gesuchten Wurzel;

2) Man subtrahire obige Quadratzahl von der Classe zur Linken, und füge dem Reste 6 die Classe zur Rechten 25 bey.

3) Man verdopple den gefundnen Theil der Wurzel (12) dividire damit bis in die Zehner der folgenden

den Classe, und bemerke den Quotienten 5, als den zweyten Theil der gesuchten Wurzel.

4) Das Quadrat des zweyten Theils, addire man zum Producte aus dem zweyten Theil in den Divisor, und subtrahire die Summe (625) von dem Reste 625.

5) Würde diese Summe größer als der Rest gefunden: so müßte man, wie bey der Division §. 58, den angenommenen Quotienten immer um Eins so lange vermindern, als es erfoderlich ist. Z. E. wäre die gegebene Zahl 4223 gewesen, so müßte man in der Wurzel 4 statt 5 setzen.

6) Bleibt nach geendigter Operation kein Rest, wie bey √4225, so ist die gefundene Zahl 65 die genaue Wurzel; bleibt aber ein Rest, 127, wie bey √4223, so fällt die gesuchte Wurzel zwischen 64 und 65. Im ersten Fall ist das Quadrat von 65 der gegebenen Zahl 4225 gleich, im zweyten ist das Quadrat von 64 nebst dem Reste 127 der gegebenen Zahl 4223 gleich, welches zur Probe dient.

III. Fall. Wenn die gegebene Zahl mehr als vier Ziffern hat: so theile man sie wie beym zweyten Falle, und verfahre alsdann auf folgende Art:

1) Aus den ersten beyden Classen zur Linken ziehe man nach dem zweyten Falle die beyden ersten Ziffern (64) der gesuchten Wurzel.

	41	37	06	24	6432
	36				
12)	537				
	496				
128)	4106				
	3849				
1286)	25724				
	25724				
	0				

2) Zu dem Reste 41 setze man die folgende Classe (06), welches die Zahl 4106 giebt. Die gefundnen

Ziffern

Ziffern 64 sehe man als den ersten Theil der gesuchten Wurzel an, verdopple solche (128), und dividire damit bis in die Zehner der dritten Classe; da denn der Quotient 3 die dritte Ziffer der Wurzel giebt. Das Quadrat dieser Ziffer addire man zum Producte aus der Ziffer in den Divisor, und subtrahire die Summe 3849 von obiger Zahl, wie im zweyten Falle Nr. 4. 5.

3) Zu dem Reste 257 setze man die folgende Classe 24, welches die Zahl 25724 giebt. Die gefundnen Ziffern 643 sehe man wiederum als den ersten Theil der gesuchten Wurzel an, verfahre damit wie Nr. 2, und wiederhole diese Operation für jede folgende Classe bis zur letzten; da man denn so viel Theile der Wurzel findet, als Classen vorhanden sind. Die hier gefundene Zahl 6432 ist die gesuchte Wurzel wie im zweyten Falle Nr. 6.

4) Giebt bey solchen Operationen ein Divisor die 0 zum Quotienten: so sehe man sie als einen Theil der gesuchten Wurzel an, womit man nach obigen Regeln zu verfahren habe: da denn sogleich in die Augen fällt, daß man in solchem Falle nur die Null in der gesuchten Wurzel an ihrer Stelle zu bemerken habe, und sogleich zur folgenden Classe fortschreiten könne. Mit dem zuletzt gebliebenen Reste verhält es sich wie im zweyten Falle.

```
      36|60|25|605
      36|  |  |
      --------
12)     60
        00
      ---------
120)    60 25
        60 25
      ---------
            0
```

Beweis. Der erste Fall ist für sich klar, bey dem zweyten Falle ist folgendes zu erwägen:

1) Die gesuchte Wurzel muß zwey Ziffern haben. Denn die höchste Zahl mit einer Ziffer giebt zum Quadrate

drate nur zwey Ziffern; und die niedrigste Zahl mit drey Ziffern giebt zum Quadrate fünf Ziffern, da doch die gegebene Zahl mehr als zwey und weniger als fünf Ziffern hat.

2) Macht man von einer Zahl mit zwey Ziffern das Quadrat: so besteht solches aus dem Quadrate der Zehner, aus dem doppelten Producte der Einer in die Zehner, und aus dem Quadrate der Einer.

$$\begin{array}{rl} 65 = & 60 + 5 \\ 65 = & 60 + 5 \\ \hline 25 = & 5^2 \\ 300 = & 60.5 \\ 300 = & 5.60 \\ 3600 = & 60^2 \\ \hline 4225 = & 60^2 + 2(60.5) + 5^2 \end{array}$$

§. 33.

3) Das Quadrat der Zehner fängt sich in den Hunderten an, und geht höchstens bis zu den Tausenden, daher man die erste Ziffer der Wurzel in der ersten Classe zur Linken suchen muß.

4) Das doppelte Product der Einer in die Zehner fängt sich in den Zehnern an, und geht höchstens bis in die Hunderte, daher es in dem Reste mit Zuziehung der Zehner der zweyten Classe enthalten seyn muß, und man also die zweyte Ziffer der Wurzel findet, wenn man mit der verdoppelten ersten Ziffer darein dividirt.

5) Das Quadrat der Einer fängt sich in den Einern an, und geht höchstens bis zu den Zehnern; daher solches noch in der zweyten Classe enthalten ist.

Der dritte Fall läßt sich auf den zweyten zurückführen. Denn

1) Man habe eine Zahl von drey Classen, 41|37|06| so wird, wie zuvor, bewiesen, daß die Wurzel drey Ziffern haben müsse, wovon die beyden ersten eine

Menge

Menge von Zehnern angeben, die dritte aber die Einer enthält. §. 49. Nun ist das Quadrat der Zehner eine Menge von Hunderten, folglich in den beyden ersten Classen 41|37| enthalten. Um daher die Zehner der gesuchten Wurzel zu erhalten, ziehe man die Wurzel aus den beyden ersten Classen mit Beyseitsetzung der dritten. Diese ist nach dem zweyten Falle (64) oder hier eigentlich (640) §. 115, und giebt also die Zehner der gesuchten Wurzel. Fügt man nun dem gebliebenen Reste (41) die dritte Classe (06) bey, welches die Zahl (4106) giebt: so ist das doppelte Product der Zehner in die Einer der Wurzel, in den Zehnern dieser Zahl, und das Quadrat der Einer in der letzten oder den beyden letzten Ziffern solcher Zahl enthalten; und man findet daher die Einer der gesuchten Wurzel, wenn man mit den Zehnern (64) verdoppelt (128) in die Zahl (410) dividirt, und die Subtraction, wie beym zweyten Falle, verrichtet.

2) Hat man nun eine Zahl von vier Classen 41|37|06|24| oder auch von mehrern: so lassen sich obige Schlüsse leicht wiederholen.

Anmerk. Der allgemeine Beweis der Auflösung kann erst mit Hülfe der Buchstabenrechnung vollständig geführt werden.

Die 3te Aufgabe.

§. 118. Aus einer ganzen Zahl, die kein vollständiges Quadrat ist, die Quadratwurzel durch Näherung zu ziehen.

Auflös.

7	2645
4	
4)	300
	276
52)	2400
	2096
528)	30400
	26425
	3975

Auflös. Man hänge der gegebenen Zahl (7) so viel Paar Nullen an, als beliebt, und operire nach §. 117. In der gefundenen Wurzel (2645) schneide man durch das Comma von der Rechten an so viel Stellen ab, als man Paare von Nullen beygefügt hat (2,645).

Beweis. Nimmt man an, daß die Wurzel eine ganze Zahl und zehn Theilchen enthalte; so enthält das Quadrat hundert Theilchen; und man kann die gegebene Zahl 7 so ausdrücken, daß sie hundert Theilchen enthält, indem man ihr ein Paar Nullen anhängt (7,00), da man denn zu der Wurzel in ganzen Zahlen die dazu gehörigen Zehntheilchen sucht. Sollte die Wurzel noch Hundertheilchen enthalten, so enthält das Quadrat zehn Tausendtheilchen; da man denn der Zahl noch ein Paar Nullen anhängt (7,0000), und die Hunderttheilchen der Wurzel sucht u. s. w.

§. 119. Zusatz 1. Daß die Rechnung ohne Ende fortgehe, erhellet theils daraus, daß, mit welcher Classe man auch aufhört, immer das Quadrat der letzten Ziffer der Wurzel von einer Null subtrahirt werden, folglich stets ein Rest bleiben müsse; theils daher, weil sich §. 113 überhaupt kein Bruch angeben läßt, der die Quadratwurzel solcher Zahl genau ausdrückte, ob man sie gleich desto genauer findet, je weiter man die Operation verfolgt.

§. 120. Zusatz 2. Zugleich erhellet hieraus, wie man aus einem Decimalbruche die Quadratwurzel ziehen könne, wenn man nur die Eintheilung in Classen

von

von der Stelle der Einer anhebt. Z. E. 3|25,|74|90| oder 0,|00|30|.

§. 121. Anmerk. Beym Ausziehen der Quadratwurzel kann man sich zur Ersparung oder doch Abkürzung der Arbeit der bereits berechneten Tafeln §. 72. auf folgende Art bedienen:

Nachdem die gegebene Zahl in Classen getheilt, suche man in den Tafeln für die höchsten Classen die nächste Quadratzahl 41 34 49, (deren Wurzel 643), subtrahire sie, setze zum Reste die folgende Classe, und operire nach dem Vorhergehenden.

	44	37	06	24	643
$A^2 =$	41	34	49		
	2	57	24		

Die 4te Aufgabe.

§. 122. Aus jedem Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, oder sich derselben beliebig zu nähern.

Auflös. Da es hier §. 112 auf die Wurzel des Zählers und Nenners ankömmt: so findet ein doppelter Fall statt:

1) Ist der Nenner des gegebenen Bruchs $\frac{16}{49}$ oder $\frac{7}{49}$ ein vollkommenes Quadrat: so findet man $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{6}{7}$, und $\sqrt{\frac{7}{49}}$ beynahe $= \frac{2,647}{7} = \frac{2647}{7000}$. §. 70.

2) Ist der Nenner des gegebenen Bruchs $\frac{5}{7}$ kein vollkommenes Quadrat: so multiplicire man beyde Glieder des Bruchs mit seinem Nenner; da denn $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7}}$, folglich der erste Fall wieder eintritt.

Andere Auflös. Man verwandle den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch §. 103, und ziehe §. 120 die Wurzel daraus.

§. 123. Zusatz. Soll man aus einer ganzen Zahl (3), die kein vollkommenes Quadrat ist, die Wurzel bis auf einen bestimmten Theil ($\frac{1}{15}$) ziehen: so ver-

wandle man die Zahl in einen Bruch, der das Quadrat dieses bestimmten Theils (15) zum Nenner hat, und ziehe daraus §. 122 die Wurzel. So ist z. E. $15^2 = 225$, folglich $3 = \frac{3 \cdot 225}{225} = \frac{675}{225}$, und $\sqrt{3} = \sqrt{\frac{675}{225}} = \frac{26}{15}$, beynahe, wo noch nicht $\frac{1}{15}$ fehlt.

Erklärung.

§. 124. Größen heißen irrational, die sich weder durch das angenommene Maaß, noch durch irgend einen Theil dieses Maaßes genau messen lassen; alle übrige heißen rational.

§. 125. Zusatz. Alle ganze Zahlen und Brüche, deren Glieder völlig angegeben werden, sind Rationalzahlen; jene, weil sie durch die Einheit, diese, weil sie durch Theile der Einheit genau gemessen werden. Alle Wurzelgrößen hingegen, die weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch sich völlig angeben lassen, §. 119. sind Irrationalzahlen, weil sie weder durch die Einheit, noch durch irgend einen Theil derselben genau gemessen werden.

§. 126. Anmerk. Es kann Zahlen geben, die sich von gewissen Theilen der Einheit nicht messen lassen, obwohl von andern. Diese sind dennoch rational, weil zu Irrationalzahlen erfoderlich ist, daß gar kein Theil der Einheit sie mißt. So ist z. E. der Bruch $\frac{1}{7}$ gewiß rational, ob er sich gleich durch einen Decimalbruch nicht genau ausdrücken läßt. §. 104.

Lehrsatz.

§. 127. Der Werth einer Irrationalgröße kann zwar nie völlig, aber immer doch so genau angegeben werden, daß das noch fehlende kleiner

wird,

wird, als jede beliebig angenommene Grösse, quouis dato minus.

Beweis. Läßt sich eine Grösse durch ein angenommenes Maaß nicht genau messen: so enthält sie von den Theilen des Maaßes eine gewisse Menge, und noch etwas drüber, das aber kleiner ist, als ein solcher Theil. Theilte man nun das Maaß so, daß seine Theile kleiner als jede beliebig angenommene Grösse würden, und drückte die Irrationalgrösse durch die Menge solcher darinn enthaltnen Theile aus: so beträgt das fehlende noch viel weniger, als die beliebig angenommene Grösse.

Beyspiele einer solchen **Näherung** kommen bey Ausziehung der Wurzeln vor §. 118; ja selbst bey Rationalzahlen, die sich nur durch gewisse Theile der Einheit nicht messen lassen. §. 104.

§. 128. **Zusatz.** Durch dergleichen Näherung läßt sich eine Irrationalzahl allemal zwischen zwey Rationalzahlen einschränken, die einander so nahe kommen können, als man will; so daß sich ihr Unterschied ohne Ende immer kleiner und kleiner machen läßt.

So ist z. E. $\sqrt{14}$ zwischen 3 und 4; oder 3, 7 und 3, 8; oder 3, 74 und 3, 75; oder 3, 741 und 3, 742; oder 3, 7416 und 3, 7417; oder 3, 74165 und 3, 74166; oder 3, 741657 und 3, 741658; oder 3, 7416574 und 3, 7416575 u. s. w. enthalten, wo der Unterschied immer kleiner wird, und noch ferner ohne Ende kleiner werden kann. §. 119.

Lehrsatz.

§. 129. Grössen, die sich ohne Ende einander nähern, werden zuletzt einander gleich.

Beweis. Gesetzt, sie wären zuletzt ungleich: so ließe sich ihr Unterschied, er möchte auch noch so klein seyn, angeben, welcher also nicht noch kleiner werden könnte, gegen das Angenommene.

§. 130. Anmerk. Hiedurch wird nicht behauptet, daß z. E. irgend eins von den §. 128 angezeigten und noch folgenden Gränzenpaaren einander, und also auch der dazwischen liegenden $\sqrt{14}$ völlig gleich wäre, welches offenbar nicht ist; sondern nur, daß solche Gleichheit erst zuletzt statt finden müsse, und daß man sich ihr immer mehr nähern könne, ohne sie doch jemals wirklich zu erreichen; daher man ein Paar solcher Gränzen nur in so fern, als sie sich ohne Ende einander noch immer weiter nähern können, einander gleich setzen kann. In der Ausübung aber kann man freylich zu jedem Gebrauche bey einem Paare dieser Gränzen stehen bleiben, und die eine statt der andern, oder statt der dazwischen liegenden Größe, ohne merklichen Fehler setzen.

§. 131. Zusatz. Die Lehrsätze, die im Vorhergehenden von Rationalzahlen bewiesen worden, gelten auch von Irrationalzahlen, und sind also allgemein. Denn wäre dieses nicht: so müßte man, da man sich dem Werthe der Irrationalzahlen ohne Ende nähern kann, §. 127. irgend einmal auf rationale Gränzen §. 128. 129. kommen, wovon das nicht gelte, was von Rationalzahlen bewiesen worden, welches unmöglich ist.

Die 5te Aufgabe.

§. 132. Aus einer ganzen Zahl die Cubikwurzel zu ziehen.

Auflös. I. Fall. Wenn die gegebene Zahl eine bis höchstens drey Ziffern hat: so findet man die Wurzel in dem Wurzeltäflein §. 114 entweder genau, oder doch zwey Zahlen, zwischen die solche Wurzel fällt.

Z. E.

z. E. $\sqrt[3]{512} = 8$, und $\sqrt[3]{645}$ fällt zwischen 8 und 9.

II. Fall. Wenn die gegebene Zahl vier bis höchstens sechs Ziffern hat: so theile man sie von der Rechten gegen die Linke in Classen zu drey Ziffern, wenn auch die zur Linken nur zwey oder eine erhielte, und verfahre alsdenn auf folgende Art:

```
   157|464|54
   125|   |
75)32 464
   30 0
    2 40
      64
  --------
       0
```

1) Aus dem Wurzeltäflein §. 114 nehme man eine Cubikzahl 125, die so groß oder zunächst kleiner ist, als die Classe zur Linken, und bemerke ihre Wurzel 5, als den ersten Theil der gesuchten Wurzel.

2) Solchen Cubus 125 subtrahire man von der Classe zur Linken, und füge dem Reste 32 die Classe zur Rechten 464 bey.

3) Man nehme das dreyfache Quadrat des gefundnen Theils ($3 . 25 = 75$), dividire damit bis in die Hunderte der folgenden Classe, und bemerke den Quotienten (4), als den zweyten Theil der gesuchten Wurzel.

4) Man setze das Product aus dem zweyten Theile in den Divisor ($4 . 75 = 300$) unter die Hunderte der folgenden Classe, das dreyfache Product aus dem Quadrat des zweyten Theils in den ersten ($3 . 16 . 5 = 240$) unter die Zehner, den Cubus des zweyten Theils ($4^3 = 64$) unter die Einer, und subtrahire die Summe dieser drey Zahlen von der Zahl in Nr. 2.

5) Würde die Summe größer als solche Zahl gefunden: so müßte man den angenommenen Quotienten immer um Eins so lange vermindern, als es erfoder-

lich ist. Z. E. wäre die gegebene Zahl 157456 gewesen: so müßte man in der Wurzel 3 statt 4 setzen.

6) Bleibt nach geendigter Operation kein Rest, wie bey $\sqrt[3]{157464}$: so ist die gefundene Zahl 54 die genaue Wurzel; bleibt aber ein Rest 9816, wie bey $\sqrt[3]{157456}$: so fällt die gesuchte Wurzel zwischen 53 und 54. Im ersten Falle ist der Cubus von 54 der gegebenen Zahl 157464 gleich, im zweyten aber ist der Cubus von 53 nebst dem Reste 9816 der gegebenen Zahl 157456 gleich, welches zur Probe dient.

III. Fall. Wenn die gegebene Zahl mehr als sechs Ziffern hat: so theile man sie, wie beym zweyten Falle, und verfahre alsdenn auf folgende Art:

1) Aus den ersten beyden Classen zur Linken ziehe man nach dem zweyten Falle die beyden ersten Ziffern 42 der gesuchten Wurzel.

```
        75 | 955 | 677 | 875 | 4235
        64 |
   ---------------
   48) 11  955
        9  6
           48
            8
   ---------------------
 5292) 1  867  677
       1  587  6
          11   34
               27
   ----------------------------------
 536787) 268  710  875
         268  393  5
              317  25
                   125
   ----------------------------------
               0
```

2) Zu dem Reste 1867 setze man die folgende Classe 677, welches die Zahl 1867677 giebt. Die gefundenen Ziffern 42 sehe man als den ersten Theil der gesuchten Wurzel an, nehme das Quadrat davon dreymal (5292), und dividire damit bis in die Hunderte der dritten Classe; da denn der Quotient 3 die dritte Ziffer der Wurzel giebt, und man damit, wie im zweyten Falle Nr. 4. 5. verfährt.

3) Zu

3) Zu dem Reste 268710 setze man die folgende Classe 875. Die gefundenen Ziffern 423 sehe man wiederum als den ersten Theil der gesuchten Wurzel an, verfahre damit wie Nr. 2. und wiederhole diese Operation für jede folgende Classe bis zur letzten, da man denn so viel Ziffern für die Wurzel findet, als Classen vorhanden sind. Die hier gefundene Zahl 4235 ist die gesuchte Wurzel wie im zweyten Falle Nr. 6.

4) Giebt bey solchen Operationen ein Divisor die 0 zum Quotienten: so gilt auch hier, was beym Ausziehen der Quadratwurzel §. 117. im dritten Falle Nr. 4. gesagt ist.

Beweis. Ist dem für das Ausziehen der Quadratwurzel §. 117 völlig analog, und kann erst mit Hülfe der Buchstabenrechnung allgemein geführt werden.

Die 6ste Aufgabe.

§. 133. **Aus einer ganzen Zahl, die kein vollständiger Cubus ist, die Cubikwurzel durch Näherung zu ziehen.**

Auflös. Man hänge der gegebenen Zahl (7) eine beliebige durch drey theilbare Anzahl von Nullen an, und operire nach §. 132. In der gefundenen Wurzel (191) schneide man durch das Comma von der Rechten an so viel Stellen ab, als der dritte Theil der angehängten Nullen beträgt: (1,91.)

```
      7 | 191 . . . .
      1 |
   ---------
   3) 6000
      27
      243
      729
   ---------------
1083) 141000
      1083
      87
      1
   ---------------
      32129
```

 Beweis.

Beweis. Nimmt man an, daß die Wurzel eine ganze Zahl und Zehntheilchen enthalte: so enthält der Cubus Tausendtheilchen; und man drückt die gegebene Zahl in Tausendtheilchen aus, wenn man ihr drey Nullen anhängt (7,000) da man denn zu der Wurzel in ganzen Zahlen die dazu gehörigen Zehntheilchen sucht. Sollte die Wurzel noch Hunderttheilchen enthalten: so enthält der Cubus Milliontentheilchen; da man denn der Zahl sechs Nullen anhängt (7,000000), und die Hunderttheilchen der Wurzel sucht u. s. w.

§. 134. Zusatz 1. Die Rechnung geht auch hier ohne Ende fort, wie bey §. 119.

§. 135. Zusatz 2. Um aus einem Decimalbruche die Cubikwurzel zu ziehen, hebe man, wie §. 120, die Eintheilung in Classen von der Stelle der Einer an. Z. E. 37,|500| oder 0,|000|070|

§. 136. Anmerk. Zur Abkürzung der Arbeit bedient man sich der bereits berechneten Tafeln auf ähnliche Art, wie bey dem Ausziehen der Quadratwurzel §. 121 gelehrt worden.

Die 7te Aufgabe.

§. 137. Aus jedem Bruche die Cubikwurzel zu ziehen, oder sich derselben beliebig zu nähern.

Auflös. 1) Ist der Nenner des Bruchs ein vollkommener Cubus: so ziehe man aus Zähler und Nenner die Wurzel. §. 132. Z. E. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}$, §. 112. und $\sqrt[3]{\frac{5}{27}} = \frac{2,236\ldots}{3} = \frac{2236\ldots}{3000\ldots}$

2) Ist der Nenner kein vollkommener Cubus: so multiplicire man beyde Glieder des Bruchs mit dem Quadrat des Nenners. Z. E. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 16}{4 \cdot 16}}$; da denn wieder der erste Fall vorhanden ist.

3) Oder

3) Oder man verwandle den Bruch in einen Decimalbruch, und ziehe hieraus die Wurzel, vergl. §. 122.

§. 138. Zusatz. Soll aus einer Zahl 3, die kein vollkommener Cubus ist, die Wurzel bis auf einen bestimmten Theil $\frac{1}{15}$ gezogen werden: so verwandle man die Zahl in einen Bruch, der den Cubus dieses bestimmten Theils 15 zum Nenner hat, und ziehe daraus die Wurzel, vergl. §. 123. Hiernach ist $15^3 = 3375$, folglich $3 = \frac{3 \cdot 3375}{3375} = \frac{10125}{3375}$ und $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{10125}{3375}} = \frac{21}{15}$ beynahe, wo noch nicht $\frac{1}{15}$ fehlt.

§. 139. Anmerk. 1. Auf ähnliche Art ließen sich auch die Biquadratwurzel, und die folgenden höhern Wurzeln, aus den Zahlen ziehen; allein außer dem, daß für den gemeinen Gebrauch das bisherige hinreichend, ist solche Arbeit zu beschwerlich und weitläuftig; daher man auch in der höhern Arithmetik andere Wege eingeschlagen ist.

§. 140. Anmerk. 2. Alle Wurzelgrößen, die sich nicht genau ausziehen lassen, sind Irrationalzahlen, wie oben die Quadratwurzeln dieser Art. §. 125.

Das IV. Capitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Erklärungen.

§. 141. Man betrachtet die **Verhältniß**, ratio, zweyer Größen, wenn man sieht, wie oft die eine, oder ein aliquoter Theil §. 24 der einen, in der andern enthalten ist; folglich die Verhältniß zweyer Zahlen, wenn man auf den Quotienten sieht, den die eine in die andere dividirt giebt.

Anmerk. Die Verhältniß bezeichnet man durch das Zeichen der Division (:), das man zwischen die beyden Größen setzt. Z. E. 2 : 8 bedeutet die Verhältniß der Zahlen 2 u. 8.

§. 142. Die beyden Größen, die man auf solche Art §. 141 mit einander vergleicht, heißen die **Glieder**, termini, der Verhältniß; und zwar das zur Linken das **Vorderglied**, t. antecedens, das zur Rechten das **Hinterglied**, t. consequens.

Anmerk. Es ist willkührlich, nicht nur welches Glied man zum Vordergliede machen will, sondern auch, welches von beyden Gliedern man in das andere dividiren will: so daß man sagen kann: das Vorderglied dividirt in das Hinterglied, oder mit dem Hintergliede, das ist, das Vorderglied steckt in dem Hinterglied, oder enthält das Hinterglied so vielmal, als der Quotient anzeigt.

§. 143. Der **Name der Verhältniß**, nomen rationis, heißt der Quotient, den das Vorderglied in das Hinterglied dividirt giebt. Z. E. bey der Verhältniß 2 : 8 ist der Name 4, bey 8 : 2 aber $\frac{1}{4}$.

Anmerk. Man nennt ihn auch den Exponenten der Verhältniß; es ist aber wohl besser, diese Benennung blos für Potenzen und zusammengesetzte Verhältnisse zu gebrauchen.

§. 144. Kehrt man die Glieder einer gegebenen Verhältniß um: so heißt die neue Verhältniß die **umgekehrte**, reciproca, der gegebenen, die alsdann die **gerade**, directa, genannt wird. Z. E. ist 2 : 8 die gerade Verhältniß: so ist 8 : 2 die umgekehrte.

§. 145. **Verhältniß der Gleichheit**, ratio aequalitatis, heißt, wenn beyde Glieder gleich sind; der **Ungleichheit** aber, folglich **vom Größern** oder **vom Kleinern**, ratio maioris vel minoris inaequalitatis, wenn das Vorderglied größer oder kleiner als das Hinterglied ist. Z. E. 8 : 2 . 4 ist die Verhältniß der Gleichheit, 7 : 5 vom Größern, 4 : 9 vom Kleinern.

§. 146.

§. 146. Gleiche Verhältnisse sind, die gleiche Quotienten geben, folglich auch die gleiche Namen haben. Die Gleichheit zweyer Verhältnisse aber heißt **Proportion**, proportio, wozu man daher das Zeichen der Gleichheit (=) gebraucht. Z. E. 4 : 8 = 3 : 6 heißt, die Verhältniß 3 : 6 ist der Verhältniß 4 : 8 gleich, oder wie sich 4 zu 8 verhält, so verhält sich 3 zu 6.

§. 147. Eine Proportion erfodert vier Glieder oder Größen, die man **Proportionalgrößen** nennt, und wovon das erste und vierte die **äußern**, extremi, das zweyte und dritte aber die **mittlern Glieder**, medii, heißen. Auch heißen **homologe Glieder**, die einerley Benennung führen, also die beyden Vorderglieder, oder die beyden Hinterglieder.

§. 148. Eine **stetige** oder **zusammenhängende Proportion**, proportio continua, heißt, worinn die mittlern Glieder einerley sind. Jede andere heißt **abgesondert** discreta. Z. E. 2 : 4 = 4 : 8 ist eine stetige Proportion, die man auch durch ÷ 2 . 4 . 8 zu bezeichnen pflegt. Das Glied, welches darinn zweymal vorkömmt, heißt das **mittlere**, terminus medius.

Grundsätze.

§. 149. Verhältnisse und Quotienten sind nicht einerley. Denn Quotient ist der Name der Verhältniß, nicht die Verhältniß selbst.

Anmerk. Jede Zahl zeigt die Verhältniß der Einheit zu solcher Zahl an, §. 15. 141. und ist nur der Name dieser Verhältniß. Z. E. 7 ist der Name der Verhältniß 1 : 7.

§. 150.

§. 150. Zwey Verhältnisse, deren jede einer dritten gleich ist, sind selbst gleich. Denn sie haben mit der dritten einen gemeinschaftlichen Namen.

§. 151. Das Hinterglied einer Verhältniß ist das Product des Vorderglieds in den Namen der Verhältniß §. 37. 143. Z. E. bey der Verhältniß 8 : 2 ist $2 = 8 \cdot \frac{1}{4}$.

§. 152. Sind die Glieder einer Verhältniß gegeben: so hat man auch ihren Namen; und ist der Name der Verhältniß und ein Glied gegeben: so hat man auch das andre Glied.

§. 153. Sind die drey ersten Glieder einer Proportion gegeben: so hat man auch das vierte. Denn durch die beyden ersten hat man den Namen der Verhältniß, und durch das Product des Namens in das dritte Glied hat man das vierte. Z. E. $3 : 6 = 4 : \frac{4 \cdot 6}{3}$.

§. 154. Anmerk. Dies ist die so häufig vorkommende Aufgabe: zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl (die man immer durch x zu bezeichnen pflegt) zu finden, indem man das Product aus der zweyten und dritten mit der ersten dividirt; welches auch die Proportionsregel oder Regel de Tri genannt wird.

§. 155. Jedes Product $2 \cdot 4 = 8$ giebt eine Proportion $1 : 2 = 4 : 8$; §. 31. und jeder Quotient $\frac{18}{6} = 3$ giebt eine Proportion $6 : 18 = 1 : 3$. §. 39.

§. 156. Anmerk. Hiedurch erhält man allgemeinere Erklärungen der Multiplication und Division, welche auch für Brüche §. 78, und Irrationalzahlen §. 84 gelten. Es heißt nemlich allgemein multipliciren eine Zahl finden, welche aus dem einen Factor so entsteht, als der andere aus der Einheit; und dividiren, eine Zahl finden, welche aus der Einheit so entsteht, als der Dividendus aus dem Divisor §. 151.

Der 1ste Lehrsatz.

§. 157. Werden zwey Zahlen mit einerley ganzen oder gebrochenen Zahl multiplicirt oder dividirt: so verhalten sich die Producte oder die Quotienten wie diese Zahlen.

Beweis. Es sey der Quotient oder Bruch $\frac{8}{12}$. Multiplicirt oder dividirt man nun beyde Glieder mit einerley Zahl 2: so erhält man $\frac{8}{12} = \frac{8 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{8 : 2}{12 : 2}$, §. 71. folglich $12 : 8 = 12 . 2 : 8 . 2 = \frac{12}{2} : \frac{8}{2}$. §. 146.

§. 158. Zusatz 1. Zwey Brüche von einerley Nenner verhalten sich wie ihre Zähler. Denn man kann sie mit dem gemeinschaftlichen Nenner multipliciren. Z. E. $\frac{3}{7} : \frac{5}{7} = \frac{3}{7} . 7 : \frac{5}{7} . 7 = 3 : 5$.

§. 159. Zusatz 2. Jede Verhältniß läßt sich in ganzen, und zwar in den kleinsten, Zahlen angeben. Denn sind die Glieder Brüche: so bringe man sie unter einerley Benennung, §. 74. da sie sich wie die neuen Zähler verhalten. Haben diese einen gemeinschaftlichen Theiler: so lassen sie sich damit aufheben, bis sie relative Primzahlen §. 73 werden, welche denn die kleinsten Zahlen in dieser Verhältniß sind.

§. 160. Zusatz 3. Zwey Brüche von einerley Zähler verhalten sich, wie die Nenner umgekehrt. Denn man dividire sie mit dem gemeinschaftlichen Zähler, und bringe sie unter einerley Benennung. Z. E. $\frac{3}{4} : \frac{3}{5} = \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{5}{4 . 5} : \frac{4}{4 . 5} = 5 : 4$.

§. 161. Zusatz 4. Um eine Verhältniß umzukehren, §. 144. verwandle man die Glieder in Brüche, deren Zähler die Einheit, und deren Nenner die Glieder

der der gegebenen Verhältniß sind. Z. E. von der Verhältniß 3 : 4 ist die umgekehrte $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$.

Der 2te Lehrsatz.

§. 162. Sind vier Zahlen, 4, 8, 3, 6, proportionirt: so ist das Product aus den äußern Gliedern (4 . 6) dem Producte aus den mittlern (8 . 3) gleich. Auch sind vier Zahlen 4, 8, 3, 6, proportionirt, wenn das Product aus der ersten und vierten (4 . 6) dem Producte aus der zweyten und dritten (8 . 3) gleich ist.

Beweis. 1) Die Proportion 4 : 8 = 3 : 6 giebt $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$. §. 146. Bringt man diese Brüche, deren Nenner die Vorderglieder, und deren Zähler die Hinterglieder der Proportion sind, unter einerley Benennung $\frac{8 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 4}$: §. 74, so wird das Product aus den Hintergliedern der gemeinschaftliche Nenner; der Zähler des einen Bruchs aber ist das Product aus den äußern, und der Zähler des andern das Product aus den mittlern Gliedern. Nun sind beyde Brüche einander gleich, und haben einerley Nenner; folglich müssen auch ihre Zähler, das ist, die Producte aus den äussern und mittlern Gliedern, gleich seyn.

2) Wären die Zahlen nicht proportionirt, folglich die Brüche $\frac{8}{4}$, $\frac{6}{3}$ ungleich, §. 146. und man bringt sie unter einerley Benennung $\frac{8 \cdot 3}{4 \cdot 3}$, $\frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 4}$: so wären diese Brüche, deren Zähler die Producte aus der ersten und vierten, und aus der zweyten und dritten der gegebenen Zahlen sind, auch ungleich. Sie haben einerley Nenner: folglich müßten ihre Zähler, das ist, die obgedachten

ten Producte (8 . 3) und (6 . 4), ungleich seyn, gegen die Voraussetzung.

§. 163. Zusatz 1. In jeder Proportion 4 : 8 = 3 : 6 lassen sich die Glieder **umkehren**, 8 : 4 = 6 : 3, auch die mittlern Glieder **verwechseln** 4 : 3 = 8 : 6, weil hiedurch noch immer dieselben Zahlen entweder äußere oder mittlere Glieder, folglich dieselben gleichen Producte 8 . 3, 6 . 4, bleiben; folglich die vier Zahlen noch immer proportionirt sind.

§. 164. Zusatz 2. Jede zwey gleiche Producte geben eine Proportion, wenn man beliebig die Factoren des einen Products zu äußern, des andern zu mittlern Gliedern macht.

§. 165. Zusatz 3. Sind vier Zahlen proportionirt: so bleiben sie es auch, wenn man beliebig entweder die beyden Glieder einer Verhältniß, oder zwey homologe Glieder, mit einerley ganzen oder gebrochenen Zahl multiplicirt oder dividirt. §. 157.

§. 166. Zusatz 4. In einer stetigen Proportion ∺ 2 . 4 . 8 ist das Product aus den äußern Gliedern (2 . 8) dem Quadrate des mittlern Gliedes (4 . 4) gleich, §. 162. folglich das mittlere Glied die Quadratwurzel aus dem Producte der beyden äußern.

§. 167. Zusatz 5. In einer stetigen Proportion, deren erstes Glied die Einheit ist, ∺ 1 . 3 . 9, ist das dritte Glied das Quadrat des zweyten; folglich das zweyte oder mittlere Glied die Quadratwurzel aus dem dritten.

§. 168. Zusatz 6. In einer abgesonderten Proportion, deren erstes Glied die Einheit ist, 1 : 3 = 4 : 8, ist das vierte Glied das Product aus den beyden mittlern wie §. 155.

Der

Der 3te Lehrsatz.

§. 169. Sind vier Zahlen proportionirt, $12:6 = 8:4$; so verhalten sich 1) die Summen oder Differenzen der homologen Glieder, wie die beyden ersten oder letzten Glieder, $12 \mp 8 : 6 \mp 4 = 12 : 6 = 8 : 4$; 2) die Summen oder Differenzen der beyden ersten und der beyden letzten Glieder, wie die homologen Glieder, $12 \mp 6 : 8 \mp 4 = 12 : 8 = 6 : 4$.

Beweis. 1) Die angenommene Proportion giebt die gleichen Producte $12.4 = 6.8$. Wird nun das Product aus den Gliedern der einen Verhältniß (8.4) beyderseits addirt oder subtrahirt: so erhält man $12.4 \mp 8.4 = 6.8 \mp 8.4$, §. 57. das ist, $(12 \mp 8)\,4 = (6 \mp 4)\,8$, §. 33. folglich $12 \mp 8 : 6 \mp 4 = 8 : 4$ §. 164. $= 12 : 6$. §. 150.

2) Wird bey obigen gleichen Producten das Product aus homologen Gliedern (6.4) beyderseits addirt, oder subtrahirt: so erhält man $12.4 \mp 6.4 = 6.8 \mp 6.4$, §. 57. das ist, $(12 \mp 6)\,4 = (8 \mp 4)\,6$, §. 33. folglich $12 \mp 6 : 8 \mp 4 = 6 : 4$ §. 164. $= 12 : 8$.

§. 170. Zusatz 1. Aus der letzten Proportion folgt durch Verwechselung $12 \mp 6 : 6 = 8 \mp 4 : 4$, oder $12 \mp 6 : 12 = 8 \mp 4 : 8$; und hieraus durch Umkehrung $12 : 12 \mp 6 = 8 : 8 \mp 4$. §. 163.

§. 171. Zusatz 2. Sind drey oder mehrere Verhältnisse einander gleich: so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Dies

Dies erhellet sogleich, wenn man den Satz §. 169 auf die erste und zweyte Verhältniß anwendet; dann auf die beyden ersten und die dritte; dann auf die drey ersten und die vierte u. s. w. Z. E. es sey $2:3 = 4:6 = 8:12 = 16:24$ u. s. w. so ist §. 169. $2+4:3+6 = 8:12$, folglich auch $2+4+8:3+6+12 = 16:24$, folgl. $2+4+8+16:3+6+12+24 = 2:3$ u. s. w.

§. 172. Anmerk. Hat man, wie §. 171, mehrere gleiche Verhältnisse: so ist es manchmal bequem, die homologen Glieder auf eine Seite des Gleichheitszeichens zusammen zu bringen, auf folgende Art: $2:4:8:16 = 3:6:12:24$.

Der 4te Lehrsatz.

§. 173. Werden die Glieder zweyer Proportionen nach der Ordnung mit einander multiplicirt: so sind die Producte in eben der Ordnung auch proportionirt.

Es sey z. E. $6:2 = 9:3$
$8:4 = 10:5$

so ist $6.8:2.4 = 9.10:3.5$

Beweis. Von den gegebenen Proportionen giebt, nach §. 146, die erste $\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$, und die zweyte $\frac{4}{8} = \frac{5}{10}$, woraus man durch die Multiplication erhält $\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{8} = \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{10}$, §. 9. folglich $6.8:2.4 = 9.10:3.5$. §. 146.

§. 174. Zusatz 1. Dies gilt auch von drey und mehrern Proportionen; welches erhellet, wenn man die beyden ersten durch Multiplication verbindet, mit dieser neuen die dritte u. s. f. Dergleichen Verbindung der Proportionen heißt Zusammensetzung.

§. 175. Zusatz 2. Sind bey solcher Zusammensetzung in den Verhältnissen gemeinschaftliche Glieder: so kann man diese hinweglassen. Z. E.

$$\left.\begin{array}{r} 8:4 = 12:6 \\ 9:3 = 6:2 \end{array}\right\} 8.9:4.3 = 12:2$$

$$\left.\begin{array}{r} 3:6 = 4:8 \\ 6:18 = 8:24 \end{array}\right\} 3:18 = 4:24$$

$$\left.\begin{array}{r} 3:6 = 4:8 \\ 6:24 = 1:4 \end{array}\right\} 3:24 = 1:8.$$

Alles dieses erhellet, wenn man die gegebenen Proportionen nach §. 173 zusammensetzt, und dann mit den gemeinschaftlichen Gliedern dividirt. §. 165.

§. 176. Zusatz 3. Sind vier Zahlen proportionirt: so sind es auch ihre Potenzen von einerley Grade; welches erhellet, wenn man die gegebene Proportion zwey oder mehrere mal unter einander setzt, und die Glieder nach der Ordnung multiplicirt. §. 174.

§. 177. Zusatz 4. Werden die Glieder einer Proportion $2:6 = 3:9$ nach der Ordnung mit vier Zahlen multiplicirt, die nicht proportionirt sind 4, 8, 7, 5: so sind die erhaltenen Producte in der Ordnung nicht proportionirt. Denn ersteres giebt $\frac{6}{2} = \frac{9}{3}$, letzteres $\frac{8}{4} > \frac{5}{7}$, folglich $\frac{6 \cdot 8}{2 \cdot 4} > \frac{9 \cdot 5}{3 \cdot 7}$. §. 10.

§. 178. Zusatz 5. Der Satz von den Producten §. 173, kann auch von Quotienten bewiesen werden. Denn wären diese Quotienten nicht proportionirt, und man multiplicirte sie nach der Ordnung in die Divisoren, die proportionirt sind: so erhielte man die Dividenden,

beyden, die nicht proportionirt wären §. 177, gegen das Angenommene.

§. 179. Zusatz 6. Sind vier Zahlen proportionirt: so sind es auch ihre Wurzeln von einerley Grade. Denn multiplicirte man diese Wurzeln in sich selbst: so würden sie, wie sich nach Art des §. 177 leicht beweisen läßt, keine Proportion formiren, gegen das Angenommene.

§. 180. Zusatz 7. Sind mehrere Zahlen stetig proportionirt $\div\!\!\div$ 2.4.8.16: so verhalten sich die Quadratzahlen der beyden ersten Glieder wie das erste Glied zum dritten; und die Cubikzahlen der beyden ersten Glieder, wie das erste Glied zum vierten, u. s. f. Denn da

$$2:4 = 2:4$$
$$2:4 = 4:8 \quad \text{so ist } 2^2:4^2 = 2:8$$
$$2:4 = 8:16 \qquad 2^3:4^3 = 2:16. \text{ §. 175.}$$

§. 181. Zusatz 8. Demnach verhalten sich auch in §. 180 die beyden ersten Glieder wie die Quadratwurzeln aus dem ersten und dritten, oder wie die Cubikwurzeln aus dem ersten und vierten Gliede. §. 179.

Das V. Capitel.

Von der Rechnung in benannten Zahlen, auch den sogenannten Rechnungsregeln.

Erklärungen.

§. 182. Eine benannte Zahl ist, die, nebst der Menge der Einheiten, auch noch die Art (den Namen)

derselben angiebt; eine **unbenannte Zahl** aber, die blos die Menge der Einheiten, ohne Bestimmung der Art (des Namens), angiebt.

Anmerk. Im gemeinen Leben sowohl, als in den Wissenschaften, pflegt man die benannten Einheiten auf verschiedene Weise in Theile zu theilen, welches man sich bekannt machen muß. Hiezu dienen die Beylagen am Schlusse der Arithmetik.

§. 183. Die Art der Einheit einer benannten Zahl, die in eine bestimmte Menge von Theilen getheilt wird, heißt der **größere Name**; die Art eines solchen Theils aber, der **kleinere Name**.

§. 184. Eine benannte Zahl **reduciren**, oder auf einen andern Namen bringen, heißt eine Zahl finden, die der gegebenen am Werthe gleich ist, aber einen andern Namen hat.

§. 185. Die **Reductionszahl** ist, welche die Menge der Einheiten des einen Namens bestimmt, die auf eine Einheit oder eine Menge von Einheiten des andern Namens gehen.

§. 186. Eine Zahl ist **complex**, z. E. 3 Mk. 5 Loth 7 Grän, wenn sie aus verschiednen einander untergeordneten Arten von Einheiten, die also alle auf eine Art gebracht werden können, besteht; **incomplex** aber, z. E. 4864 Aß, wenn alle ihre Einheiten von einerley Art sind.

Anmerk. 1. Incomplexe Zahlen von einerley Namen werden, wie die unbenannten Zahlen, addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt, ohne daß dazu besondere Regeln nöthig sind. Nur ist zu merken, daß der Multiplicans stets unbenannt seyn müsse, §. 19. der Divisor aber sowohl benannt als unbenannt seyn könne. §. 40.

Anmerk. 2. Durch die Reduction läßt sich jede complexe Zahl auf eine incomplexe bringen, und dann nach der Art

der unbenannten Zahlen behandeln. Um aber eine oft beschwerliche Reduction zu ersparen, müssen Regeln für complexe Zahlen gegeben werden.

§. 187. Will man Dinge in Absicht auf ihre Größe mit einander vergleichen: so muß man die Größe eines jeden nach einerley Maaß bestimmen, das ist, in Zahlen ausdrücken, und forschen, wie oft die eine Zahl in der andern enthalten ist. Solche Zahlen heißen die **Verhältnißzahlen** dieser Dinge, weil sie ihre Verhältniß angeben. §. 141.

Z. E. wiegt ein Cubikfuß Wasser 70, Kupfer 630, Quecksilber 980 ℔: so zeigt $\frac{630}{70} = 9$, und $\frac{980}{70} = 14$, daß Kupfer 9, und Quecksilber 14 mal schwerer als Wasser sey; und die Verhältnißzahlen sind hier 70, 630, 980, oder 7, 63, 98, oder 1, 9, 14. §. 157.

Anmerk. Man sieht hieraus, daß blos Dinge von einerley Art, die entweder einerley Namen haben, oder sich auf einerley Namen bringen lassen, eine Verhältniß zu einander haben können. Zwar scheint es bisweilen, als ob man Dinge von verschiedner Art mit einander vergleiche, wenn man z. E. die Verhältniß des Wassers zum Kupfer, des Vermögens zu den Schulden, der Gebornen zu den Gestorbenen, u. s. w. anzeigt; allein im ersten Falle ist vom Gewichte, im zweyten vom Gelde, im dritten von Menschen die Rede.

§. 188. Hat von zwey Paar Dingen das eine eben die Verhältniß, als das andere: so sind diese Dinge **in gerader Proportion**; ist aber die Verhältniß des einen Paares der umgekehrten Verhältniß des andern gleich: so sind diese Dinge **in umgekehrter Proportion**. (Vergl. §. 144.)

Anmerk. Dinge verschiedner Art stehen überhaupt in Proportion, wenn beyde Arten nach einerley Maaße wachsen und abnehmen; insbesondere aber in gerader Proportion, wenn die eine Art nach eben dem Maaße wächst oder abnimmt; nach welchen die andere Art wächst oder ab-

nimmt; und in umgekehrter, wenn die eine nach eben dem Maaße abnimmt, nach welchem die andre wächst. So sind

1) in gerader Proportion, alle Größen, die einander gleich sind, oder die sich als Ursachen und Würkungen betrachten lassen, als: Gewicht der Waare und Größe des Preises; Menge der Arbeiter und Größe der Arbeit; Zahl der Menschen und Menge der Lebensmittel; Größe des Capitals und Größe der Zinsen u. s. w. Wenn man z. E. sagt, 100 rthl. Cap. bringt 5 rthl. Zinsen: so heißt das eigentlich, jedes Capital von 100 rthl. bringt 5 rthl. Zinsen, so daß für jedes Vielfache dieses Capitals eben dies Vielfache dieser Zinsen zu setzen ist, oder mit welcher Zahl man das Capital multiplicirt, mit eben der Zahl auch die Zinsen multiplicirt werden müssen. Daher denn das eine Capital in dem andern so oft steckt, als die Zinsen des ersten in den Zinsen des andern; folglich Capital und Zinsen in gerader Proportion sind. Z. E. 100 rthl. Cap.: 1000 rthl. Cap. = 5 rthl. Zinsen: 50 rthl. Zinsen.

2) In umgekehrter Proportion, alle Größen in solcher Beziehung, daß mit der Zahl, womit die eine multiplicirt wird, die andere dividirt werden muß. Z. E. die Menge der Arbeiter, und die Größe der Zeit; desgleichen die Zahl der Menschen, und die Zeit, wie lange sie mit eben dem Vorrath an Lebensmitteln ausreichen u. d. m.

§. 189. Dinge sind in **zusammengesetzter Proportion**, wenn die Verhältniß des einen Paars aus den Verhältnissen mehrerer Paare zusammengesetzt ist. (vergl. §. 174. 175.) Ist dies aber nicht: so heißt die Proportion **einfach**, oder schlechthin Proportion. So ist die Verhältniß der Würkungen aus der Verhältniß der Ursachen, und aus der Verhältniß der Zeiten, zusammengesetzt. Z. E. die Zinsen verhalten sich wie die Capitalien und wie die Zeiten, wie lange die Capitale ausstehen.

§. 190. Die **Theilregel** betrift ein Ganzes, das aus gleichen oder ungleichen Theilen besteht, und lehrt

eins

eins aus dem andern finden. Sie bekömmt aber nach ihrer verschiednen Anwendung auch verschiedne Namen, und heißt:

1) Die **Durchschnittsrechnung**, wenn zwey oder mehrere Größen in ein Ganzes gebracht werden, und dieses in eben so viel gleiche Theile getheilt werden soll.

2) Die **Gesellschafts- oder Repartitionsrechnung**, wenn ein Ganzes in ungleiche Theile nach gegebenen Verhältnissen zu theilen ist.

3) Die **Vermischungsrechnung**, wenn aus Theilen, deren Verhältnisse gegeben sind, ein Ganzes zu machen; oder aus dem Werthe der Theile der mittlere Werth des Ganzen zu bestimmen ist.

4) Die **Alligationsrechnung**, die aber zur Algebra gehört, wenn aus der Beschaffenheit des Ganzen und der Theile die Verhältnisse der Theile zu finden sind.

Die 1ste Aufgabe.

§. 191. **Eine benannte Zahl zu reduciren, das ist, auf einen kleinern oder größern Namen zu bringen.**

Auflös. Mit der Reductionszahl §. 185 multiplicire oder dividire man die gegebene Zahl, um sie durch das erste auf den kleinern, durch das letzte aber auf den größern Namen zu bringen. Bleibt bey der Division ein Rest: so behält derselbe den kleinern Namen; doch kann man auch den Rest, ja die gesammte Division als einen Bruch bezeichnen, der den größern Namen führt. Z. E. es ist

1 Mk. Apothekergew. = 8 ℥ = 64 ʒ = 192 ℈ = 3840 Gr.

20 Mk. 7 Loth 13 Grän deutsch Silbergew. = 5899 Grän.

7 ℔ Sterl. 12 Schill. 7 Pence = 1831 Pence.

767 Par. Fuß = $\frac{767}{6}$ Tois. = $127\frac{5}{6}$ Tois. = 127 Tois. 5 Fuß.

57600 Bogen Papier = 2400 Buch = 120 Rieß = 12 Ballen.

§. 192. Zusatz Auf eben die Art wird auch ein benannter Bruch reducirt. Z. E. es ist

$\frac{7}{9}$ rthl. = $\frac{7}{9}$. 24 ggr. = $\frac{7 \cdot 24}{9}$ ggr. = $18\frac{2}{3}$ ggr. = 18 ggr. 8 pf.

$\frac{16}{3}$ ggr. = $\frac{16}{3} \cdot \frac{1}{24}$ rthl. = $\frac{16}{3 \cdot 24}$ rthl. = $\frac{2}{9}$ rthl.

6 Monat 20 Tage = $6\frac{2}{3}$ Monat = $\frac{20}{3}$ Monat = $\frac{20}{3 \cdot 12}$ Jahr = $\frac{5}{9}$ Jahr.

0,3786 rthl. = $\frac{3786}{10000}$ rthl. = $\frac{3786 \cdot 24}{10000}$ ggr. = 9,0864 ggr. = 9 ggr. 1,0368 pf.

§. 193. Zusatz 2. Auch ist es oft für Rechnungen sehr vortheilhaft, den kleinern Namen auf Decimaltheile des größern zu bringen. Z. E. es ist

1 ggr. = $\frac{1}{24}$ rthl. = 0,0416 . . . . rthl.

1 pf. = $\frac{1}{12}$ ggr. = $\frac{1}{12 \cdot 24}$ rthl. = $\frac{1}{288}$ rthl. = 0,003472 . . . . rthl.

1 Monat = $\frac{1}{12}$ Jahr = 0,083 . . . . . Jahr.

1 Tag = $\frac{1}{365}$ Jahr = 0,00274 Jahr.

1 Holl. Ducat. = 5 fl. 5 Stüv. = $5\frac{1}{4}$ fl. folglich

1 fl. Holl. = $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ Ducat. = $\frac{4}{21}$ Duc. §. 92. = 0,190475 . . . . . Duc.

1 Holl.

1 Holl. Ducat. = $2\frac{1}{4}$ rthl. Conventionsgeld, folglich 1 rthl. Conv. = $\frac{1}{2\frac{1}{4}}$ Duc. = $\frac{4}{11}$ Duc. §. 92. = 0,363636 . . . . Duc.

Die 2te Aufgabe.

§. 194. Complexe Zahlen zu einander zu addiren und von einander zu subtrahiren.

(an deutschem Silbergew.)

$125\frac{2}{7}$ Mk.	$14\frac{4}{5}$ Loth	$16\frac{3}{4}$ Gr.	A
$87\frac{5}{7}$ =	$15\frac{5}{8}$ =	$17\frac{2}{3}$ =	B
$212\frac{7}{7}$ =	$29\frac{57}{40}$ =	$33\frac{17}{12}$ =	C
214 =	$15\frac{17}{40}$ =	$16\frac{5}{12}$ =	D
$37\frac{4}{7}$ =	$15\frac{7}{40}$ =	$17\frac{1}{12}$ =	E

Auflös. 1) Man schreibe die gegebenen Zahlen, A, B, so, daß sie von einerley Namen, und bey jedem Namen die Ziffern von einerley Ordnung unter einander stehen.

2) Nach den allgemeinen Regeln der Addition suche man ihre Summe C, und bringe in dieser durch die Reduction §. 191 den kleinern Namen auf den größern: so erhält man D = A + B.

3) Soll B von A subtrahirt werden: so verfahre man nach den allgemeinen Regeln der Subtraction; nur daß beym Borgen für eine Einheit des größern Namens so viel Einheiten, als die Reductionszahl §. 185 anzeigt, zu der Zahl des kleinern Namens hinzukommen: so erhält man E = A − B.

Die 3te Aufgabe.

§. 195. Complexe Zahlen zu multipliciren.

Z. E. Man will wissen, wie viel der jährliche Ertrag A in drey Jahren beträgt?

3657 rthl.	17 ggr.	11 pf.	A
		3	B
10971 rthl.	51 ggr.	33 pf.	C
10973 rthl.	5 ggr.	9 pf.	D

1ste Auflös. Jedes Glied in A multiplicire man mit B, (nicht mit 3 Jahren, sondern mit der unbenannten Zahl 3, weil A für jedes Jahr einmal folglich für drey Jahre dreymal zu nehmen.) In dem Producte C bringe man jeden kleinern Namen auf den zunächst größern; so erhält man D.

2te Auflös. Man bringe A auf einen Decimalbruch, wenn man 1 ggr. = 0,0416 rthl., und 1 pf. = 0,0034 rthl. setzt, §. 193. und jenen mit 17, diesen mit 11 multiplicirt. Dies giebt E, und dies, mit B multiplicirt, giebt F.

3657,7446 rthl.	E
3	B
10973,2338 rthl.	F

Anmerk. Wollte man wissen, wie viel 1478 fl. 15 Stüv. in Holländischen Ducaten betrügen? so setze man 1478¼ fl. = 1478,75 und 1 fl. = 0,1904 Duc. §. 193. Jenes giebt G, dieses H, und deren Product K die Menge der Ducaten.

1478,75	G
0,1904	H
591500	
1330875	
147875	
281,5540000	K

17 ggr. 11 pf.

8 ggr.	$\frac{1}{3}$	1 rthl.	— ggr.		
4 ggr.	$\frac{1}{2}$	—	12 :		
2 + 2 ggr.	$\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$	—	12 :		
1 ggr.	$\frac{1}{2}$	—	3 :		
6 pf.	$\frac{1}{2}$	—	1 :	6 pf.	
2 + 2 pf.	$\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3}$	—	1 :		
1 pf.	$\frac{1}{2}$	—	— :	3 :	
17 ggr. 11 pf.		2 rthl.	5 ggr.	9 pf.	

Jn

3te Auflös. Hat man in A die Zahl des größten Namens mit B multiplicirt (3657 . 3 = 10971): so zerlege man die Zahlen der kleinern Namen dergestalt, daß das erste Stück ein aliquoter Theil vom größten Namen sey, das zweyte Stück von dem ersten, das dritte von dem zweyten, und so ferner immer das folgende Stück von dem nächst vorhergehenden, wie beygesetztes Schema zeigt. Nun mache man das Product des Multiplicans B in den ersten Bruch: so zeigt der zweyte Bruch, wie viel von diesem Producte, und immer jeder folgende Bruch, wie viel von dem Betrage des nächst vorhergehenden Bruchs zu nehmen sey.

Anmerk. Von dieser letztern Methode, die unter dem Namen der welschen Practik bekannt ist, läßt sich aus obiger Auseinandersetzung der Grund leicht einsehen.

Die 4te Aufgabe.

§. 196. Complexe Zahlen zu dividiren.

Erster Fall, wenn der Divisor unbenannt ist. Z. E. es sollen 454 rthl. 22 ggr. 3 pf. unter 17 Personen zu gleichen Theilen getheilt, das ist, mit 17 dividirt werden.

```
 B            A                    C          D        E
17) 454 rthl.   22 ggr.    3 pf. | 26 rthl. 18 ggr. 3 pf.
    34       a. 288     c. 48    |
    ----     ------     -----
    114      b. 310     d. 51
    102         17         51
    ----     ------     -----
 a. 12          140        0
                136
             ------
             c. 4
```

Auflös. Mit B dividire man den höchsten Namen A. Dies giebt den Quotienten C, und den Rest a. Diesen addire man reducirt zu dem folgenden Namen, und

und dividire die Summe b wieder mit B. Dies giebt den Quotienten D, und Rest c, womit man wie zuvor verfährt; da denn der gesammte Quotient C + D + E anzeigt, wie viel jeder bekömmt.

Zweyter Fall, wenn der Divisor benannt ist. Z. E. es sollen 454 rthl. 22 ggr. 3 pf. so vertheilt werden, daß jeder 26 rthl. 18 ggr. 3 pf. erhalte; wie viel Personen können hieran Theil nehmen?

Auflös. Man bringe beyde Zahlen auf einerley, entweder kleinsten, oder größten, Namen, und suche nach den gemeinen Divisionsregeln, wie vielmal die kleinere Zahl in der größern steckt. Das erste giebt $\frac{131019}{7707}$ pf. = 17; das zweyte $\frac{454\frac{89}{96}}{26\frac{73}{96}}$ rthl. = $\frac{43673}{96}$: $\frac{2569}{96}$ = $\frac{43673}{2569}$ = 17; oder mit Decimalbrüchen $\frac{454{,}92}{26{,}76}$ rthl. = 17.

Die 5te Aufgabe.

§. 197. Das vierte Glied einer geraden Proportion zu finden, wenn die drey ersten Glieder gegeben sind.

Auflös. Wird bey den mannichfaltigen Modificationen der Aufgabe am besten durch Exempel gelehrt:

3 ℔		7 rthl.		14 ℔?	A
3 ℔ : 14 ℔	=	7 rthl. : x pf.			B
3 : 14	=	7 rthl. : x pf.			C
x	=	$\frac{14 \cdot 7}{3}$ rthl.			D

1) 3 ℔ kosten 7 rthl.; was kosten 14 ℔? A, das ist, die Preise verhalten sich wie die Waaren B §. 188. Da aber offenbar 3 ℔ : 14 ℔ = 3 : 14, so verhalten sich

sich die Preise wie die unbenannten Zahlen 3 : 14, C. Hieraus kömmt D §. 153.

100 rthl. Cap. $2\frac{2}{5}$ rthl. Zinsen $461\frac{7}{8}$ rthl. Cap.? A
100 : $461\frac{7}{8}$ = $2\frac{2}{5}$ Zins. : x Zins. B
100 : $\frac{3695}{8}$ = $\frac{12}{5}$ Zins. : x Zins. C
$x = \frac{3695 \cdot 12}{8 \cdot 5 \cdot 100}$ D
$= \frac{739 \cdot 3}{2 \cdot 100}$ E

2) 100 rthl. Capital geben $2\frac{2}{5}$ rthl. Zinsen; wie viel Zinsen geben $461\frac{7}{8}$ rthl. Cap.? A, das ist, die Zinsen, wie die Capitale B §. 188, wofür C kömmt, hieraus D §. 153, und durch das Aufheben E §. 72.

6 Ctn. 15 rthl. 1 ℔? A
6 Ctn. : 1 ℔ = 15 rthl. x ggr. B
6.110 ℔ : 1 ℔ = 15.24 ggr. : x ggr. C
6.110 : 1 = 15.24 ggr. : x ggr. D
$x = \frac{15 \cdot 24 \cdot 1}{6 \cdot 110}$ ggr. E
$= \frac{3 \cdot 2}{11}$ ggr. F

3) 6 Ctn. kosten 15 rthl.; wie viel ggr. kostet 1 ℔? A, das ist, die Preise, wie die Waaren B, wo die ungleichnamigen Glieder durch Reduction §. 191, die aber nur angezeigt wird, gleichnamig zu machen C, wofür D kömmt, hieraus E, und durch das Aufheben F.

1 ℔ 5 rthl. 18 ggr. 6 pf. 5 ℔ 12 Loth 3 Qu.? A
1 ℔ : 5 ℔ 12 Loth 3 Qu. = 5 rthl. 18 ggr. 6 pf. : x rthl. B
32 Lth. 4 Qu. : 691 Qu. = $\frac{416}{72}$ rthl. : x rthl. C
32.4 : 691 = $\frac{416}{72}$ rthl. : x rthl. D
$x = \frac{691 \cdot 416}{32 \cdot 4 \cdot 72}$ E
$= \frac{691 \cdot 13}{36 \cdot 8}$ F

4) 1 ℔ kostet 5 rthl. 18 ggr. 6 pf; wie viel rthl. kosten 5 ℔ 12 Loth 3 Qu.? A, das ist, die Preise, wie

wie die Waaren B, und gleichnamig gemacht C, wofür D kömmt, hieraus E und durch das Aufheben F.

§. 198. Anmerk. Von der häufigen Anwendung der geraden Proportion können hier, des Raums wegen, keine weitern Exempel gegeben werden. Indeß werden doch einige Bemerkungen für den Gebrauch der angehängten Beylagen dienlich seyn:

1) Wollte man z. E. Rheinländische und Pariser Fuß in einander verwandeln: so setze man
1 Rheinl. Fuß : 1 Par. Fuß = 13913 : 14400, folglich 14400 Rheinl. Fuß = 13913 Par. Fuß §. 162, welches die Reductionszahlen sind.

2) Um den Werth eines Pf. Sterl. in Thalern Conventionsgeld (nach dem 20 fl. Fuße zu erhalten, setze man:

364,80 Aß 1 rthl. Conv. 2306,83 Aß?

3) Um zu finden, wie viel Markstück Lübisch aus einer rauhen oder feinen Mark Cöllnisch (= 4864 Aß geprägt werden, setze man im ersten Falle:

190,7 Aß 1 Mkstück 4864 Aß? u. im zweyten:
143 Aß 1 Mkstück 4864 Aß?

4) Da 1 Holl. Ducat (zu $5\frac{1}{4}$ fl.) 71,3 Aß fein Gold, und 1 fl. Holl. 200 Aß fein Silber hält; so setze man:

71,3 Aß $5\frac{1}{4}$ fl. 4864 Aß?
200 Aß 1 fl. 4864 Aß?

Hiedurch findet man, wie hoch die feine Mark Gold und Silber ausgebracht wird; und diese Zahlen geben die Verhältniß des Goldes zum Silber.

5) Da 18 fl. Hannöversches Cassengeld, oder 20 fl. Conventionsgeld, oder 21 fl. Preußisch Courant, 1 Cölln. Mk. fein Silber halten: so haben diese einerley innern Werth, der das natürliche Pari zwischen diesen Münzsorten ausmacht. Hievon aber ist der Cours zu unterscheiden, der auf zufälligen Umständen beruhet. Z. E. wird ein Louisd'or mit 5 rthl. Conv. oder mit 5 rthl. 8 ggr. Preuß. Courant, oder mit 4 rthl. 16 ggr. Hannöv. Cassengelde verwechselt: so ist 5 rthl. Conv. = $5\frac{1}{3}$ rthl. Preuß. Cour. = $4\frac{2}{3}$ rthl. Hannöv. Casseng. oder 15 rthl. Conv. = 16 rthl. Preuß. = 14 rthl. Casseng.

6) Ge-

6) Gewöhnlich rechnet man beym Geldwechsel nach Procenten. Z. E. 18 fl. Hannöv. 21 fl. Preuß. 100 fl. Hannöv.? da denn 100 fl. Hannöv. = $116\frac{2}{7}$ fl. Preuß., also jenes um $16\frac{2}{7}$ Procent besser, als dieses.

Die 6ste Aufgabe.

§. 199. Das vierte Glied einer umgekehrten Proportion zu finden, wenn die drey ersten Glieder gegeben sind.

Auflös. Da sich hier ein Paar Größen wie ein Paar andre umgekehrt verhalten §. 188: so verfahre man nach §. 161. Z. E.

1) 5 Arbeiter 4 Wochen 7 Arbeiter x Wochen giebt $\frac{1}{5} : \frac{1}{7} = 4$ W. : x W. folglich $x = \frac{4 \cdot 1 \cdot 5}{7 \cdot 1}$ W.

2) 7 Wochen 6 Arbeiter 3 Wochen x Arbeiter giebt $\frac{1}{7} : \frac{1}{3} = 6$ A. : x A. folglich $x = \frac{6 \cdot 1 \cdot 7}{3 \cdot 1}$ Arb.

3) 700 Mann haben auf 5 Monat Proviant: wie viel Mann müssen abgehen, wenn man mit demselben Proviant 8 Monat auskommen muß? Dies giebt

$\frac{1}{5} : \frac{1}{8} = 700$ Mann : x Mann, folglich $x = \frac{700 \cdot 1 \cdot 5}{8 \cdot 1}$ = 437 Mann, und müssen also 263 M. abgehen.

4) Zu einem Kleide braucht man 5 Ellen $2\frac{1}{4}$ breites Tuch; wie viel Ellen $\frac{3}{4}$ breites Unterfutter sind dazu nöthig? Dies giebt

$\frac{1}{\frac{9}{4}} : \frac{1}{\frac{3}{4}} = 5$ Ellen : x Ellen oder $\frac{4}{9} : \frac{4}{3} = 5$ Ellen : x Ellen, folglich $x = \frac{5 \cdot 4 \cdot 9}{3 \cdot 4} = 5 \cdot 3$ Ellen.

5) Gilt der Berliner Scheffel Weitzen 1 rthl. der dem Becker zu 1 rthl. 14 ggr. = 38 ggr. angerechnet wird: so wiegt eine 3 Pfennigsemmel $12\frac{1}{2}$ Loth;

wie

wie viel muß sie wiegen, wenn der Scheffel 2 rthl. gilt, der dem Becker zu 2 rthl. 17 ggr. = 65 ggr. angerechnet wird? Dies giebt

$\frac{1}{38} : \frac{1}{65} = 12,5$ Loth : x Loth, folglich $x = \frac{12,5 \cdot 38}{65}$
$= \frac{2,5 \cdot 38}{13} = 7\frac{4}{13}$ Loth.

6) Von meinem Nachbar hatte ich 550 rthl. Capital auf 3 Jahr: jetzt hat er von mir 1500 rthl. Capital; wie lange kann er dies behalten, daß der Dienst gleich werde? Oder

550 rthl. Cap. 3 Jahr 1500 rthl. Cap. x Jahr.

Dies giebt

$\frac{1}{550} : \frac{1}{1500} = 3$ Jahr : x Jahr, folglich $x = \frac{300 \cdot 550}{1500}$
$= \frac{11}{10}$ Jahr.

Die 7te Aufgabe.

§. 200. Das vierte Glied einer zusammengesetzten Proportion zu finden, wenn die vorhergehenden Glieder gegeben sind.

Auflös. Gründet sich auf §. 175, und läßt sich am kürzesten an einem Exempel lehren.

20 Arbeiter	15 Wochen	300 Ellen
36 " "	6 " "	x " "

Hier beruhet die Verhältniß der Arbeit, oder der Würkung, auf den Verhältnissen der Arbeiter und der Wochen, oder der Ursachen und Zeiten §. 189. Dies giebt
20 A. 15 W. : 36 A. 6 W. = 300 Ellen : x Ellen, od.
$20 \cdot 15 : 36 \cdot 6 = 300$ Ell. : x Ell. folglich $x =$
$\frac{300 \cdot 36 \cdot 6}{20 \cdot 15} = 36 \cdot 6 = 216$ Ellen.

Beweis.

Beweis. Setzte man die Zeiten gleich (daß die 36 Arbeiter auch 15 Wochen arbeiteten): so hätte man A. wo das letzte Glied die Würkung für 15 Wochen giebt. Nun will man sie aber für 6 Wochen wissen. Dies giebt B. Aus beyden aber wird C §. 175.

$$20 : 36 = 300 \text{ Ell.} : x' \text{ Ell.} \quad A$$
$$15 : 6 = x' \text{ Ell.} : x \text{ Ell.} \quad B$$
$$20 . 15 : 36 . 6 = 300 \text{ Ell.} : x \text{ Ell.} \quad C$$

Anderer Beweis. Man bringe die gegebenen Verhältnisse auf eine einzige. Denn 20 Arbeiter in 15 Wochen machen eben so viel, als 1 Arb. in 20 . 15 W.; und 36 Arb. in 6 W. eben so viel, als 1 Arb. in 36 . 6 W. Dies giebt

$$20 . 15 \text{ W.} : 36 . 6 \text{ W.} = 300 \text{ Ell.} : x \text{ Ell.}$$

Auch konnte man sagen, 20 Arb. in 15 Woch. machen eben so viel, als 20 . 15 Arb. in 1 W., und 36 A. in 6 W. eben so viel, als 36 . 6 A. in 1 W. Dies giebt

$$20 . 15 \text{ Arb.} \; 36 . 6 \text{ A.} = 300 \text{ Ell.} : x \text{ Ell.}$$

§. 201. Zusatz 1. Hieraus und §. 199. erhellet das Verfahren, wenn hiebey auch umgekehrte Verhältnisse vorkommen. Z. E.

20 Arb.	300 Ellen	15 Wochen
36 Arb.	216 Ellen	x Wochen

wo die Zeiten in gerader Verhältniß der Arbeit und in umgekehrter Verhältniß der Arbeiter sind. Dies giebt $300 . \frac{1}{20} : 216 . \frac{1}{36} = 15 \text{ W.} : x \text{ W.}$, folglich $x = \frac{15 \cdot 216 \cdot 20}{36 \cdot 300} = 6$ Wochen: welches zugleich zur Probe in §. 200. dient.

§. 202. Zusatz 2. Auch bleibt dasselbe Verfahren, wenn mehr als zwey Verhältnisse gegeben sind. Z. E.

20 Arb.	15 Woch.	6 Stunden tägl.	300 Ell.
36 "	6 "	8 " "	x "

Dies giebt

20 A. 15 W. 6 St. : 36 A. 6 W. 8 St. = 300 Ell. : x Ell., d. i.
20 . 15 . 6 : 36 . 6 . 8 = 300 Ell. : x Ell.

Hievon läßt sich, wie §. 200, der doppelte Beweis eben so leicht führen.

§. 203. Zusatz 3. Zuweilen werden bey dergleichen Aufgaben Umstände mit angegeben, die in die Rechnung keinen Einfluß haben, und daher geschickt abgesondert werden müssen. Dieses zu erläutern, und dadurch zugleich weitere Aussichten zu geben, diene ein Exempel aus N. Schmids Rechenkunst S. 203.

Aufgabe: Ein Fabrikant hat 3751 Arbeiter; er gebraucht des Jahrs 597 rthl. 5 ggr. 9 pf. Cassengeld für Brod, wenn er nemlich einem jeden täglich $\frac{1}{2}$ ℔ Brod giebt, und der Himten Rocken 27 ggr. 4 pf. gilt; die Casse des Fabrikanten will, daß er nur $\frac{3}{4}$ des Geldes in Golde an Brod verwenden dürfe. Er schafft daher die Hälfte der Arbeiter ab, der Kornpreis ist um $\frac{1}{4}$ gestiegen; wie viel ℔ Brod kann er bey solchen Umständen täglich einem jeden geben?

Auflös. Hier verhalten sich die täglichen Portionen für die Person ($\frac{1}{2}$ ℔ : x ℔)

1) wie die Capitale 1 : $\frac{3}{4}$, oder eigentlich wie 1 Casseng. : $\frac{3}{4}$ Gold, wie 1 Cass. : $\frac{3}{4}$. $\frac{14}{15}$ Cass. weil

15 Gold 14 Casseng. $\frac{3}{4}$ Gold?

2) wie die Getreidepreise 1 und $1\frac{1}{4}$, oder 1 und $\frac{5}{4}$ umgekehrt, folglich wie $\frac{1}{1} : \frac{1}{\frac{5}{4}}$, d. i. wie $\frac{1}{1} : \frac{4}{5}$.

3) wie

3) wie die Zahl der Arbeiter 1 und $\frac{1}{2}$ umgekehrt, folglich wie $\frac{1}{7} : \frac{1}{\frac{1}{2}}$, d. i. wie $\frac{1}{1} : \frac{2}{1}$.

Hiedurch erhält man also folgende zusammengesetzte Proportion:

$$\left.\begin{array}{l} 1 : \frac{3}{4} \cdot \frac{14}{15} \\ \frac{1}{1} : \frac{4}{5} \\ \frac{1}{1} : \frac{2}{1} \end{array}\right\} = \frac{1}{2} \text{℔} : x \text{℔}$$

folglich $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{1} = \frac{14}{15}$ ℔.

§. 204. Zusatz 4. Zu den zusammengesetzten Proportionen gehört auch die zusammengesetzte Zinsenrechnung, wenn die jährlichen Zinsen mit zum Capital geschlagen, also Zinsen von Zinsen gegeben werden. Z. E.

1) Will man den Werth von 1 rthl. nach 3 Jahren zu 4 p. C. wissen: so setze man

fürs 1ste Jahr	100 rthl.	: 104 rthl.	= 1 rthl.	: x' rthl.
" 2te "	100 rthl.	: 104 rthl.	= x' rthl.	: x'' rthl.
" 3te "	100 rthl.	: 104 rthl.	= x'' rthl.	: x rthl.
folglich	100^3	: 104^3	= 1 rthl.	: x rthl.

§. 174. 175.

und $x = \frac{104^3}{100^3} = 1{,}124864$ rthl.

2) Will man von 1 rthl., der nach 3 Jahren zahlbar ist, den baaren Werth zu 4 p. C. wissen: so kehre man nur obige Verhältnisse um. Dies giebt

$$x = \frac{103^3}{104^3} = 0{,}8889563587 \text{ rthl.}$$

§. 205. Zusatz 5. Zu den zusammengesetzten Proportionen gehört endlich auch die sogenannte Kettenregel, wenn die gegebenen Verhältnisse so beschaffen sind, daß immer das Vorderglied einer folgenden mit dem

Hintergliede der zunächst vorhergehenden einerley Namen führt; welches häufig vorkömmt, wenn man Maaße und Geldsorten 2c. in einander zu verwandeln hat.

Z. E. Man will 3456 mgr. in Ducaten umsetzen. Wüßte man, wie viel mgr. auf einen Ducaten gehen: so fände man dieses durch eine einfache Proportion. Weiß man dies nun nicht, aber wohl, daß 3 mgr. = 2 ggr., 16 ggr. = 1 fl., 3 fl. = 2 rthl., und 11 rthl. = 4 Ducaten: so setze man

3 mgr. : 2 ggr.		
16 ggr. : 1 fl.	}	= 3465 mgr. : x Ducaten
3 fl. : 2 rthl.		§. 200.
11 rthl. : 4 Duc.		

folglich $3 . 16 . 3 . 11 : 2 . 1 . 2 . 4 = 3465$ mgr. : x Ducaten

und $x = \frac{3465 . 2 . 2 . 4}{3 . 16 . 3 . 11}$ Ducaten.

Die 8te Aufgabe.

§. 206. Ein Ganzes in ungleiche Theile zu theilen, deren Verhältnisse gegeben sind. §. 190.

Ganzes	Verhältnisse	Quotienten	Theile
	A. 1000	a. 20	200
450	B. 800	b. 16	160
	C. 450	c. 9	90
		45	

Auflös. Man addire die gegebenen Verhältnißzahlen A, B, C, oder statt ihrer die Quotienten a, b, c, die durch die Division mit einem gemeinschaftlichen Theiler entstehen, und setze: diese Summe verhält

sich

sich zum Ganzen, wie jede Zahl zu dem ihr zugehöri-
gen Theile.

Beweis. Nach der gegebenen Vorschrift soll seyn: die erste Verhältnißzahl verhält sich zu ihrem Theile, wie die zweyte zu ihrem Theile, wie die dritte zu ihrem Theile, u. s. w. wo also mehrere gleiche Verhältnisse sind, folglich, durch die Addition der homologen Glieder §. 171, die Summe der Verhältnißzahlen zur Summe der Theile, das ist, zum Ganzen, sich verhält, wie jede Verhältnißzahl zu ihrem Theile.

Hat man aber die gegebenen Verhältnißzahlen mit einem gemeinschaftlichen Theiler dividirt §. 157: so verhält sich eben so die Summe der Quotienten zum Ganzen, wie jeder Quotient zu seinem Theile.

§. 207. Zusatz 1. Sind die gegebenen Verhältnisse Brüche, so mache man sie gleichnamig, da sie sich denn wie ihre Zähler verhalten. §. 158.

Anmerk. Diese Auflösung geschieht bey den Rechenmeistern durch die sogenannte Regel Falsi.

§. 208. Zusatz 2. Sind zusammengesetzte Verhältnisse gegeben: so bringe man sie auf einfache, wie im zweyten Bew. §. 200. Z. E.

Verhältnisse	Quot.	Product	Quot.
A. 250 rthl. auf 2 Jahr	5 . 8	40	20
B. 300 „ „ $1\frac{1}{2}$ „	6 . 6	36	18
C. 100 „ „ $2\frac{1}{4}$ „	2 . 9	18	9

Hier ist 250 rthl. auf 2 Jahr so viel als 2.250 rthl. auf 1 Jahr u. s. w. da man denn statt dieser Producte die Producte aus den Quotienten setzt, die zuweilen wieder neue Quotienten geben.

§. 209. Zusatz 3. Von der Theilregel §. 206 ist die Vermischungsrechnung §. 190 nicht verschie-

 den,

den, oder die Aufgabe: Es sind zu einer Mischung die Verhältnißzahlen der Ingredienzen gegeben; man soll ihre Quantität für eine gegebene Quantität der Mischung finden.

Z. E. bey Verfertigung des Schießpulvers müssen auf 1 ℔ (oder 16 Unzen) Salpeter 3 Unzen Kohlen und 2 Unzen Schwefel gerechnet werden, und man soll 1000 ℔ Schießpulver machen; wie viel von jedem Ingredienz wird dazu erfodert? da sich denn die Summe der Verhältnißzahlen zur Quantität der Mischung verhält, wie jede Verhältnißzahl zu dem zugehörigen Theile.

A.	16	$761\frac{19}{21}$ ℔
B.	3	$142\frac{18}{21}$ ℔
C.	2	$95\frac{5}{21}$ ℔
	21	

§. 210. Zusatz 4. Zur Theilregel gehört auch die **Durchschnittsrechnung**, nur daß hier ein Ganzes, das aus ungleichen Theilen zusammengesetzt wird, in gleiche Theile zu theilen ist. §. 190.

Hier wird die Summe des Gegebenen, mit der Anzahl der gegebenen Stücke dividirt; da denn der Quotient der **Durchschnitt** oder die **Mittelzahl** ist.

Z. E. der Ertrag ist im 1sten Jahre A, im 2ten B, im 3ten C; oder eine Sache ist von drey Taxatoren zu A, B, C, angeschlagen: so ist die Summe D, und $\frac{1}{3}$ davon der Durchschnitt E.

354	rthl.	5	ggr.	A
375	=	8	=	B
384	=	2	=	C
1113	=	15	=	D
371	=	5	=	E

§. 211. Zusatz 5. Zur **Durchschnittsrechnung** gehört auch die Aufgabe: denn mittlern Werth der Mischung zu finden, wenn die Menge und der Werth der gemischten Dinge gegeben sind.

Hier

Hier multiplicirt man den Werth eines jeden Ingrediens mit seiner Menge, addirt diese Producte, und dividirt die Summe mit der gesammten Quantität der Mischung. Z. E.

1.			2.		
12 Mk. Silb.	14 löth.	168 L.	4 Loth Silb.	10 löth.	40 L
15 =	= 11 =	165 =	8 = =	12 =	96 =
3 =	= 9 =	27 =	6 = =	14 =	84 =
30		360	18		220

Bey 1. sind in 1 Mark der Mischung $\frac{360}{30} = 12$ Loth fein Silber, bey 2. zeigen die Producte 16theilchen an, und es sind in 1 Lothe der Mischung $\frac{220}{18}$ oder $12\frac{1}{4}$ solcher 16theilchen fein Silber.

Beylagen

zu der Rechnung in benannten Zahlen.

Aus Krusens Hamburgischen Contoristen von 1771.

I. Vom Gewichte.

§. 1. Beym Gewichte ist die Einheit 1 Pfund (℔), welches in kleinere Gewichte, als Mark, Unzen, Lothe, Quentlein u. s. w. getheilt wird, und woraus größere Gewichte, als Stein, Liespfund, Centner, Schiffpfund, zusammengesetzt werden.

A. Handelsgewicht.

§. 2. Beym Handelsgewicht ist 1 Centner = 5 Stein; 1 Stein = 22 ℔; 1 ℔ = 32 Loth; 1 Loth = 4 Quent. Auf Schiffen, auch bey Landfrachten, ist 1 Schiff℔ = 20 Lies℔; 1 Lies℔ = 14 ℔ Hamburger; desgleichen 1 Last = 2 Tonnen = 4000 ℔ Seewasser franz. Gewicht, wovon 70 ℔ auf 1 Cubikfuß gehen.

§. 3. Es wiegt aber 1 ℔ Handelsgewicht an Aßen Holl. Troy in Berlin und Magdeburg 9750; Braunschweig und

Leipzig 9716; Breslau 8434; Cöln 9728; Hamburg 10080; Hannover 10127.

B. Apothekergewicht.

§. 4. Beym Apothekergewicht ist 1 ℔ = $1\frac{1}{2}$ Mark = 12 Unzen (℥), 1 ℥ = 8 Drachmen (ʒ), 1 ʒ = 3 Scrupel (℈), 1 ℈ = 20 Gran. Demnach ist 1 Dr. = 60 Gr., und 1 Unz. = 480 Gr.

§. 5. Es wiegt aber 1 ℔ Apothekergewicht an Aßen Holl. Troy in England 7766; Frankreich 7641; Holland 7680; Schweden 7416; Nürnberg und ganz Deutschland 7452, außer in Hannover 7595.

C. Gold- und Silbergewicht.

§. 6. Nach Cölnischem Markgewicht ist 1 ℔ = 2 Mark = 16 Unzen; und insbesondere

1) nach Silbergewicht 1 Unze = 2 Loth; 1 Loth = 4 Quentl.; 1 Quentl. = 4 Pfenniggewicht; 1 Pfenniggewicht = 15 Gran. Demnach ist 1 Unze = 480 Gran. Beym Münzwesen wird in ganz Deutschland die Mark in 16 Loth, das Loth in 18 Grän, und 1 Pfenniggewicht in 256 Richtpfennigstheile getheilt.

2) Nach Goldgewicht 1 Unze = 3 Carat; 1 Carat = 12 Grän. Demnach 1 Mark = 24 Carat. Diese Eintheilung ist bey den Goldmünzen in mehrern Ländern gewöhnlich, wobey man auch die Ducaten-Aeßchen hat, deren 17 ein Pfenniggewicht betragen.

§. 7. Nach Troygewicht ist 1 ℔ = $1\frac{1}{2}$ Mark = 12 Unzen, und insbesondere

1) in Holland. 1 Unze = 20 Engel; 1 Engel = 32 Aß = 24 Gran. Die Cölnische Unze wiegt 19 solcher Engel, und 1 Cöln. Pfenniggewicht, von 15 Gran oder 17 Ducaten-Aeßchen, wiegt 19 Aß Holl. Troy.

2) in England. 1 Unze = 20 Pennys, 1 Penny = 20 Gran.

3) in Frankreich. 1 Once = 8 Gros; 1 Gros = 3 Derniers; 1 Dernier = 24 Grains. Diese Eintheilung ist wie beym Apothekergewicht, nur daß der Dernier, oder Scrupel, hier in 24 Theile getheilt wird; auch ist in Frankreich das Apothekergewicht mit dem Silbergewicht einerley. Bey den Silbermünzen wird die Mark auch in 12 Derniers eingetheilt.

§. 8. Es wiegt aber 1 Mark Gold- und Silbergewicht an Aßen Holl. Troy in England $5177\frac{1}{7}$; Frankreich 5094; Holland 5120; Berlin 4875; Braunschweig 4858; Cöln, Frankfurt am Mayn, Hamburg, Hannover, Leipzig, Lübeck 4864.

D. Juwelengewicht.

§. 9. Das Juwelengewicht, für Perlen und Edelsteine, ist ziemlich aller Orten in Europa gleich, und 1 Unze Holl. Troy = 150 Carat Juwelengewicht; 1 Carat = 4 Grän. So wiegt z. E. der größte Diamant, den Portugal aus Brasilien hat, 1680 Carat = $11\frac{1}{5}$ Unzen.

II. Vom Maaße.

A. Längenmaaß.

§. 10. Das Längenmaaß, für Längen, hat zur Einheit eine Elle, oder einen Fuß, oder eine Meile.

§. 11. Das Ellenmaaß wird in halbe, Viertel, Achtel u. s. w. eingetheilt. Es ist aber 1 Elle an Scrupeln des Pariser königlichen Fußes in Braunschweig 2530; Hamburg 2540; Leipzig 2506; Magdeburg 2956.

§. 12. Das Fußmaaß wird nach der Zahl 10 oder 12, das ist, nach der Decimal- oder Duodecimaleintheilung, in Zolle, Linien und Scrupel getheilt; auch zu Faden, Klafter, Ruthen, zusammengesetzt. Der Pariser königliche Fuß, deren 6 eine Toise machen, hält 12 Zoll, 1 Zoll 12 Linien, und 1 Linie 10 Scrupel.

§. 13. Es hält aber 1 Fuß an solchen Scrupeln des Par. königl. Fußes in Dännemark 1391; England 1350; Frankreich 1440; Holland 1255; Spanien 1253; Venedig 1540; Schweden 1316; Berlin 1373; Braunschweig 1260; Cöln 1220; Hamburg 1270; Leipzig 1251; Magdeburg 1257, und ein rheinl. Fuß 1391,3.

§. 14. Das Meilenmaaß bestimmt folgende Tafel, deren erste Columne anzeigt, wie viel Meilen in ganzen und Hunderttheilen auf einen Mittelgrad der Erde gehen, der nach den Ausmessungen der Hrn. Maupertuis und Bouguer zu 57106 franz. Toisen angenommen ist; die zweyte, wie viel französische, und die dritte, wie viel rheinl. Fuß auf 1 Meile gehen:

Dänische	14,77	23188	24000
Deutsche; kleine	17,73	19324	20000
gemeine od. geograph.	15,00	22842	23642
Englische; Landmeilen	69,12	4956	5130
Seemeilen	60,00	5711	5910
Französische; Lieues	25,00	13705	14185
kleine Landmeilen	28,55	12000	12420
große Landmeilen	22,84	15000	15525
Seemeilen	20,00	17132	17731
Holländische	19,00	18033	18664
Italiänische	60,00	5711	5910
Rußische Werste	104,30	3285	3400
Schwedische	10,41	32900	34052
Spanische	26,25	13052	13509
Stadia; griechische	724,40	473	489
römische	604,30	567	587

B. Flächenmaaß.

§. 15. Das Flächenmaaß für Flächen, die Länge und Breite haben, heißt auch Quadratmaaß. Der Quadratfuß hat nach der Decimaleintheilung 100, nach der Duodecimaleintheilung aber 144 Quadratzoll; und so auch

bey

bey den übrigen Abtheilungen des Fußes. Macht man von den Verhältnißzahlen, die oben für den Längenfuß angezeigt worden, die Quadrate; so hat man die Verhältnisse für die Quadratfuße.

C. Körpermaaß.

§. 16. Das Körpermaaß für körperliche Räume, die Länge, Breite, und Tiefe, oder Höhe haben, heißt auch Cubikmaaß. Der Cubikfuß hat nach der Decimaleintheilung 1000, nach der Duodecimaleintheilung aber 1728 Cubikzoll; und so auch bey den übrigen Abtheilungen des Fußes. Macht man von den Verhältnißzahlen, die oben für den Längenfuß angezeigt worden, den Würfel; so hat man die Verhältnisse für die Cubikfuße.

III. Von der Zahl.

§. 17. Dinge, die man nicht nach vorstehenden Maaßen zu bestimmen pflegt, haben entweder ihr besondres Maaß, oder werden blos gezählt; wobey 10 einen Decher, 12 ein Dutzend, 15 eine Mandel, 20 eine Stiege, 60 ein Schock, 72 eine Webe ausmachen.

1) Papier. 1 Ballen = 10 Rieß; 1 Rieß = 20 Buch; 1 Buch = 24 Bogen.

2) Garn. 1 Stück = 4 Strähn; 1 St. = 3 Zaspel od. Zahl; 1 Zasp. = 20 Gebünd; 1 Geb. = 20 Faden; 1 Fad. = 4 Ellen.

3) Getreyde. 1 Last $1\frac{1}{4}$ Wispel; 1 Wisp. = 2 Malter; 1 Malter = 12 Scheffel; 1 Sch. = 4 Viertel; 1 Viert. = 4 Metzen.

4) Wein. 1 Tonne = 4 Oxhoft; 1 Oxh. = 3 Eymer; 1 Eym. = 2 Anker; 1 Ank. = 30 Maaß = 40 Bouteillen.

5) Bier, in Berlin: 1 Gebräude = 36 Faß; 1 Faß = 2 Tonnen; 1 Tonne = 96 Quart.

IV. Von

IV. Von den Münzen.

A. Von den Münzen überhaupt.

§. 18. Silber mit Kupfer, und Gold mit Silber oder Kupfer, oder beyden legiren oder beschicken heißt, solche Metalle zusammenschmelzen. Feines Gold oder Silber ist, das keinen Zusatz hat. Da 1 Mark 16 Loth oder 24 Carat enthält: so heißt z. E. 12löthiges Silber, oder 23caratiges Gold, wenn in jedem Stücke Silber 12 Theile fein, und in jedem Stücke Gold 23 Theile fein sind, daher ihr Gehalt durch $\frac{12}{16}$, $\frac{23}{24}$, ausgedrückt wird; und so auch in andern ähnlichen Fällen.

Anmerk. Der Gehalt der Sole wird bestimmt, wenn man angiebt, wie viel Salz in 1 Pfunde, oder in einer Kanne zu 2 ℔ steckt. Im ersten Falle heißt die Sole 6löthig, wenn sie $\frac{6}{32}$, im zweyten 12löthig, wenn sie $\frac{12}{64}$ Salz hat. Zu Halle im Saalkreise nimmt man die Kanne zu 74 Loth an, und nennt die dortige Sole 16löthig, weil sie $\frac{16}{74}$ Salz hält.

§. 19. Reelle oder gangbare Münzen sind wirklich geprägte Geldstücke. Durch fingirte oder Rechnungsmünzen versteht man den Maaßstab für den Kaufwerth der Dinge, und also auch der gangbaren Münzen, dergleichen in England Pfund Sterling, in Frankreich Livre, in Deutschland Thaler u. s. w. Jene bestimmt man nach diesem Maaßstabe aus Beschaffenheit und Gewicht des darinn enthaltnen Metalls. Hiezu braucht man in Deutschland das Cölnische Markgewicht. Es heißt aber eine Mark reines Silber oder Gold eine feine Mark, oder eine Mark fein; und eine Mark des legirten oder beschickten edlern Metalls eine rauhe Mark, oder eine Mark rauh. Das Gewicht einer Münzsorte heißt ihr Schrot, und ihr Gehalt am edlern Metall das Korn. Durch den Münzfuß wird Schrot, Korn und Kaufwerth einer Münze bestimmt.

Anmerk.

Anmerk. Das Gepräge der Münze enthält Schrift, Namen, Bildniß und Wappen des Münzherrn, wodurch derselbe die Beschaffenheit der Münze versichert. Die Bildseite heißt die Hauptseite, Avers; die Schrift- oder Wappenseite aber die Rückseite, Revers.

§. 20. Die vornehmsten Veränderungen des deutschen Münzfußes sind folgende:

1) Der alte Reichsfuß, 1566 auf dem Reichstage zu Augspurg. 8 Reichsthaler auf die rauhe, und 9 auf die feine Mark. Ein solcher Thaler hieß von seinem Gewichte uncialis, wie jetzt ein Speciesthaler.

2) Der Zinnaische Fuß 1667 zu Zinna im Magdeburgischen, von Sachsen und Brandenburg. Die feine Mark Silber auf $10\frac{1}{2}$ rthl. oder $15\frac{3}{4}$ fl.

3) Der Leipziger, oder 18 Guldenfuß, 1690 zu Leipzig, von Sachsen, Brandenburg u. Braunschweig. Die feine Mark Silber auf 12 rthl. oder 18 fl. Dieser ward 1738 zum allgemeinen Reichsfuß angenommen, ist aber nur noch von Churbraunschweig beybehalten.

4) Der Graumannische, oder 21 Guldenfuß, 1750 von Preußen angenommen, und 1764 erneuert. Die feine Mark Silber auf 14 rthl. oder 21 fl.

5) Der Conventions- oder 20 Guldenfuß, 1753 von Oesterreich und Bayern, den auch Sachsen und Braunschweig angenommen. Die feine Mark Silber auf $13\frac{1}{3}$ rthl. oder 20 fl.

6) Der 24 Guldenfuß 1766, im Schwäbischen und Fränkischen Kreise. Die feine Mark Silber auf 16 rthl. oder 24 fl.

§. 21. Zur Prüfung (Valvation) der Münzen hat man richtig legirte Probirnadeln, Streichnadeln, das ist, dünne Stifte, die aus einer verschiednen Zusammensezzung der edeln Metalle verfertigt sind. Zum Silber hat man einerley Nadeln vom 1 bis 16löthigen. Zum Golde sind dreyerley Nadeln auf halbe Carate nöthig, zur rothen.

weißen und vermischten Legirung, (d. i. mit Kupfer, Silber, oder beyden.) Nun streicht man mit dem zu probirenden Metalle auf dem Probirsteine, und zugleich mit einer oder der andern Probirnadel so lange, bis man den Strich einer Nadel findet, der mit der Farbe des zu probirenden Metalls übereinkömmt; wodurch geübte Probirer die Legirung oft bis auf 6 Gran angeben können. Zuverläßiger freylich geschieht die Valvation durch die Probe auf der Capelle, wobey sich der Münz-Wardein einer feinen Waage, der Probirwaage, und eines verjüngten Gewichts, des Probirgewichts, bedient.

§. 22. Geldwechseln, oder eine Münzsorte in eine andre umsetzen, heißt, den Werth der einen Sorte dem Werthe der andern gleich machen. Derjenige, der das bessere Geld ausgiebt, bekömmt eine größere Menge des schlechtern, oder einen Ueberschuß, Aufgeld, Agio; derjenige aber, der das schlechtere Geld ausgiebt, bekömmt eine geringere Menge des bessern, und leidet einen Abzug, Rabat, Disconto. Rechnet man hiebey nach Procenten, d. i. setzt man den Werth von 100 der einen Sorte in den Werth der andern um: so entstehen Procente entweder auf oder von Hundert, je nachdem man die 100 in der bessern oder schlechtern Sorte nimmt. Im ersten Falle rechnet man das Aufgeld, im zweyten den Rabat nach Procenten. Wird Rabat nicht ausdrücklich genannt: so versteht man immer das Aufgeld, wenn man sagt, daß zwey Münzsorten um so und so viel Procent differiren, das ist, die eine um so viel Procent besser oder schlechter als die andere sey.

B. Rechnungsmünzen.

§. 23. Die Rechnungsmünzen in folgender Tafel sind nach Aßen Holländisch Troy in der ersten Columne in feinem Golde, in der zweyten in feinem Silber gewürdigt:

Deutsch-

Deutschland. 1 rthl. zu 3 Mark od. 48 ßl. à 6 pf. od. 8 ßl. fl. od. 96 Grotfl. Hamburger Banco	35,54	528,21
1 rthl. zu 3 Mark od. 48 ßl. Lüb. à 6 pf. nach dem Lübischen Münzfuße. Hamb. Courant	29,10	429,18
1 rthl. zu 36 mgr. à 8 pf. nach dem 18 fl. Fuße Hannöverisch Courant od. Cassengeld	26,84	405,33
1 rthl. zu 24 ggr. od. 36 mgr. od. 90 Xr. Conventionsgeld nach dem 20 fl. Fuße in Leipzig, Braunschw., Oesterreich	25,50	364,80
1 rthl. zu 24 ggr. à 12 pf. nach dem 21 fl. Fuße in Berlin und allen Brandenb. Landen	24,00	347,43
1 rthl. zu 90 Xr. à 4 pf. nach dem 24 fl. Fuße im Reiche	- -	304,00
England. 1 ℔ Sterl. zu 20 ßl. oder 240 Pence	151,82	2306,83
Frankreich. 1 Livre zu 20 Sous Tournois, oder 240 Deniers	6,43	92,87
Holland. 1 Lvl zu 6 fl. oder 20 ßfl. oder 240 Grotfl. Cassa	81,67	1200,38
Banco	86,50	1267,36
1 rthl. zu $2\frac{1}{2}$ fl. oder 50 Stüver oder 100 Grotfl. Cassa	34,30	500,60
Banco	36,00	528,60

C. Gold- und Silbermünzen.

§. 24. Von den Gold- und Silbermünzen in folgender Tafel ist von jedem Stück in der ersten Columne das Schrot, in der zweyten das Korn nach Aßen Holl. Troy angegeben.

1. Gold-

1. Goldmünzen.		
August d'or. Sachsen zu 5 rthl. Conv.	137,50	124,10
Carl d'or. Braunschweig desgl.	138,00	125,00
Carolin d'or. Pfalzbayern zu 10 fl.	202,66	158,00
Doblon oder Pistolen. Spanien zu 80 Real	141,00	129,30
Ducaten. Holländischer zu 5 fl. 5 Stüv. auch $2\frac{3}{4}$ rthl. Conventionsgeld	72,60	71,30
Dänischer v. 1757 zu 12 Mk. Dän.	65,00	57,40
Friedrich d'or. Preußen	138,90	125,90
Guinea. England zu 21 Schilling	174,50	159,97
Louis d'or. Frankr. v. 1786 zu 24 Livr.	169,80	155,65
2. Silbermünzen.		
Gulden. Holland zu 20 Stüver	219,50	200,00
Krone. Dänische zu 4 Mark Dänisch	464,00	311,00
Englische zu 5 Schill.	625,00	573,00
Markstück. Lübisches zu 16 ßl.	190,70	143,00
Piaster od. Stück von Achten. Spanien zu 20 Real	564,00	511,00
Rubel. Rußland v. 1759 zu 100 Kopek.	543,00	437,00
Thaler. Preußischer seit 1750 zu 24 ggr.	463,00	347,00
Conventions = zu 24 ggr.	437,76	364,50
Laub, Frankr. 1726 zu 6 Livr.	613,70	562,50
Species = zu 2 fl. Convent.	583,68	486,40

Der

Der erste Cursus der Planimetrie, oder des ersten Theils der Geometrie.

Das I. Capitel.

Von den geradlinichten Figuren.

(Euklids Elem. 1. Buch.)

Erklärungen.

§. 1. Ein Punkt ist, was keine Theile hat. 1.

§. 2. Eine Linie ist, was lang, aber nicht breit ist. 2.

§. 3. Eine Fläche ist, was lang und breit ist. 5.

§. 4. Die Gränze eines Dinges ist sein Aeußer- 13.
stes, oder da, wo es aufhört.

§. 5. Die Gränzen einer Fläche sind Linien; ei- 6.
ner Linie aber Punkte. 3.

§. 6. Eine gerade Linie ist, deren Punkte alle 4.
nach einer Gegend zu liegen.

Von einer krummen Linie ist kein Theil gerade.

Bayerische Staatsbibliothek München

7. §. 7. Eine ebene Fläche, oder eine Ebene, ist, in der man von jedem Punkte zum andern eine gerade Linie, die ganz in der Fläche liegt, ziehen kann.

Von einer gebogenen Fläche ist kein Theil eben.

8. §. 8. Ein ebener Winkel ist die Neigung, die zwey Linien in einer Ebene gegen einander haben, wenn sie zusammentreffen, ohne doch zusammen eine gerade Linie auszumachen.

§. 9. Die Schenkel des Winkels sind die Linien, die ihn einschließen; sein Scheitel ist der Punkt, worinn sie zusammentreffen.

9. §. 10. Ein geradlinichter Winkel BAC Fig. 1. ist, den gerade Linien einschließen.

Anmerk. Unter Winkel schlechthin versteht man immer einen ebenen geradlinichten Winkel.

35. §. 11. Gleichlaufend oder parallel heißen gerade Linien in einer Ebene, DE, FG, Fig. 1. die ohne Ende verlängert nirgends zusammentreffen.

§. 12. Zusammenlaufend oder convergent, heißen gerade Linien BK, CH, Fig. 1. die genugsam verlängert zusammentreffen und einen Winkel machen. Diese sind auf jeder dem Scheitel entgegengesetzten Seite aus einander fahrend, oder divergent.

10. §. 13. Steht Fig. 2. eine gerade Linie AB auf einer andern CD so, daß die Winkel, die sie mit der andern macht, (die Nebenwinkel) einander gleich sind: so heißt sie senkrecht, oder lothrecht, oder perpendicular auf der andern; und jeder der beyden gleichen Nebenwinkel heißt ein rechter Winkel.

§. 14.

§. 14. Jeder andre Winkel heißt **schief**, und
zwar Fig. 3. ein **stumpfer** ABC, wenn er grös- 11.
ser; ein **spitzer** ABD aber, wenn er kleiner als 12.
ein rechter ist.

§. 15. Eine **ebene Figur** heißt eine allenthal- 14.
ben begränzte ebene Fläche, sie mag nun von einer
oder mehreren Linien eingeschlossen seyn.

Anmerk. Unter Figur schlechthin versteht man immer
eine ebene Figur.

§. 16. Eine Figur Fig. 4. heißt ein **Kreis**, 15.
circulus, wenn sie von einer Linie, dem **Umkreise**,
peripheria, die durchaus von einem Punkte A in-
nerhalb der Figur, dem **Mittelpunkte**, centrum, 16.
gleichweit absteht, eingeschlossen ist. Oder, ein Kreis
entsteht, wenn sich in einer Ebene eine gerade Linie
AB um einen unverrückten Punkt A ringsum dreht.

§. 17. Ein **Durchmesser**, diameter, des Krei- 17.
ses, CD, ist jede gerade Linie durch den Mittel-
punkt, die zu beyden Seiten vom Umkreise begränzt
wird.

§. 18. Ein **Halbmesser**, radius, des Kreises,
AC, ist jede gerade Linie vom Mittelpunkte bis
zum Umkreise.

§. 19. **Geradlinichte Figuren** sind, die von 20.
geraden Linien eingeschlossen werden. Diese Linien
heißen ihre **Seiten**, und machen zusammen ihren
Umring, perimeter.

§. 20. Eine **dreyseitige Figur**, oder ein **Tri-** 21.
angel, ist, die drey, eine **vierseitige Figur**, die 22.
vier, eine **vielseitige Figur**, oder ein **Polygom**, 23.
die mehr als vier Seiten hat.

24. §. 21. Ein **Triangel** Fig. 5. heißt **gleichsei-**
25. **tig**, ABC, der drey gleiche Seiten; **gleichschenk-**
26. **licht**, DEF, der nur zwey gleiche Seiten; **un-**
gleichseitig, GHK, der drey ungleiche Seiten hat.

27. §. 22. Ferner heißt ein **Triangel** Fig. 5. **recht-**
28. **winklicht**, KGH, der einen rechten Winkel;
stumpfwinklicht, NLM, der einen stumpfen
29. Winkel; **spitzwinklicht**, DEF, ABC, der
drey spitze Winkel hat.

§. 23. Unter den **vierseitigen Figuren** Fig. 6.
30. heißt die ein **Quadrat**, ABCD, die lauter glei-
31. che Seiten und rechte Winkel; ein **Rectangel**,
EFGH, die rechte Winkel, aber nicht lauter gleiche
32. Seiten; ein **Rhombus**, KLMN, die lauter
33. gleiche Seiten und schiefe Winkel; ein **Rhomboid**,
OPQR, der schiefe Winkel aber nicht lauter gleiche
34. Seiten hat; ein **Trapez** endlich, die nicht unter
diesen vieren begriffen ist.

§. 24. Ferner heißt unter den vierseitigen Figuren die ein **Parallelogramm**, deren gegenüber stehende Seiten parallel sind.

§. 25. Ein Perpendikel GH Fig. 7. auf die Grundlinie von der gegenüber liegenden Spitze eines Triangels GEF, oder von der gegenüber liegenden Seite eines Parallelogramms ABCD, heißt die **Höhe** dieser Figuren.

§. 26. Eine geradlinichte Figur heißt **regulär**, die lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel hat. Jede andere heißt **irregulär**.

§. 27.

§. 27. Größen sind **congruent**, oder **decken einander**, wenn man sie so auf einander legen kann, daß ihre sämmtlichen Gränzen auf einander fallen.

Foderungen.

§. 28. Man soll von jedem Punkte zum andern 1.
eine gerade Linie ziehen, und

§. 29. jede begränzte gerade Linie an beyden En- 2.
den beliebig verlängern, und

§. 30. um jeden Punkt mit jedem Halbmesser 3.
einen Kreis beschreiben können.

Grundlehren.

§. 31. Größen, die einander decken, sind einan- 8.
der gleich.

§. 32. Gerade Linien, wie auch Winkel, die einander gleich sind, decken einander.

§. 33. Alle rechte Winkel sind einander gleich, 10.
weil sie einander decken. §. 13.

§. 34. Die Halbmesser eines Kreises §. 18. sind alle einander gleich. §. 16.

§. 35. Der Durchmesser §. 17. ist der doppelte Halbmesser; folglich sind auch die Durchmesser eines Kreises alle einander gleich. §. 34.

§. 36. Kreise von gleichen Halbmessern oder (3, 1.)
Durchmessern sind einander gleich, weil sie einander decken. §. 34. Und Kreise, die gleich sind, haben gleiche Halbmesser und Durchmesser. §. 27.

§. 37. Der Durchmesser halbirt den Kreis, oder theilt ihn in zwey congruente Stücke, in zwey halbe Kreise, oder **Halbkreise**.

Denn legt man das eine Stück auf das andere, daß die Endpunkte des Durchmessers ungeändert bleiben: so müssen die beyden Stücke des Umkreises auf einander fallen. §. 34.

§. 38. In zwey congruenten Triangeln stehen gleiche Seiten gleichen Winkeln, und gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber.

§. 39. Durch zwey Punkte geht nur eine gerade Linie, deren Lage dadurch, und deren Größe durch ihre Endpunkte gegeben ist. §. 6.

Hat man daher die Lage einer geraden Linie und einen ihrer Endpunkte: so giebt der Kreis, den man mit dem gegebenen Halbmesser um diesen Punkt zieht, den andern Endpunkt. (Eukl. 2. u. 3. Satz.)

§. 40. Eine unbegränzte gerade Linie theilt die unbegränzte Ebene, worinn sie gezogen ist, in zwey Stücke, die an ihren entgegengesetzten Seiten liegen.

§. 41. Zwey gerade Linien, die zusammentreffen, daß sie einen Winkel machen, Fig. 8. haben nur einen Punkt E mit einander gemein, und schneiden, wenn man sie verlängert, einander in diesem Punkte. §. 40.

12. §. 42. Zwey gerade Linien können keinen Raum einschließen. §. 41.

§. 43. Jede gerade Linie EF Fig. 9. durch einen Punkt D innerhalb einer Figur schneidet genugsam verlängert den Umring wenigstens in zwey Punkten, §. 40. folglich, wenn die Figur geradlinicht ist, wenigstens zwey von ihren Seiten. §. 41.

§. 44. Jede gerade Linie durch einen innerhalb der Oefnung eines Winkels BED Fig. 8. gegebenen

nen Punkt F schneidet genugsam verlängert wenigstens einen seiner Schenkel.

Denn da sich die Schenkel beliebig über den gegebenen Punkt hinaus verlängern lassen: §. 40. so kann man die Oefnung des Winkels mit einer dritten geraden Linie GH §. 28. so schließen, daß der gegebene Punkt innerhalb des Triangels liegt; da denn die gerade Linie durch diesen Punkt genugsam verlängert wenigstens zwey Seiten des Triangels §. 43, folglich gewiß einen Schenkel des Winkels BED schneidet.

§. 45. Finden sich Fig. 9. im Umringe einer Figur zwey Punkte, wovon der eine A innerhalb, der andere G außerhalb einer andern Figur liegt: so schneiden die Umringe beyder Figuren einander wenigstens in zwey Punkten.

Die 1ste Aufgabe. Fig. 9.

§. 46. Ueber einer geraden Linie, AB, einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben. I.

Auflös. Um die Endpunkte der Linie A, B, beschreibe man mit den Halbmessern AB, BA, Kreise, die einander in C schneiden, und ziehe von C nach A und B gerade Linien.

Beweis. Verlängert man AB bis G: so ist A innerhalb, G außerhalb des Kreises um A, folglich giebt es einen Durchschnitt C. §. 45. Nun ist AC = CB, BC = BA, §. 34. und daher auch AC = CB. (Arith. §. 4.) Folglich ist der Δ ABC gleichseitig. §. 21.

Der 1ste Lehrsatz. Fig. 10.

4. §. 47. Zwey Triangel, ABC, DEF, sind congruent, wenn zwey Seiten und der davon eingeschlossene Winkel in dem einen so groß, als in dem andern sind.

Beweis. Es sey AB = DE, AC = DF, A = D. Legt man den einen △ ABC auf den andern, daß der Punkt A auf D, und AB längst DE fällt: so fällt AC längst DF, B auf E, und C auf F, §. 32. und daher CB auf FE. §. 39. 42. Demnach sind die Triangel congruent; §. 27. und es ist auch CB = FE, B = E, C = F. (vergl. §. 38.)

§. 48. Zusatz. Zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bestimmen einen Triangel, das ist, es läßt sich daraus nur ein Triangel machen, ob er wohl verschiedene Lagen haben kann.

Der 2te Lehrsatz. Fig. 11.

5. §. 49. Sind in einem Triangel ABC, zwey Seiten AB, AC gleich: so sind auch die gegenüber stehenden Winkel C, B gleich. Und
6. sind in einem Triangel ABC, zwey Winkel C, B, gleich: so sind auch die gegenüber stehenden Seiten AB, AC gleich.

Beweis. 1) Man verlängere AB, AC unter die Grundlinie, nehme beliebig AD = AE, §. 39. und ziehe CD, BE.

Da AB = AC, AE = AD und A = A: so ist ABE = ACD, E = D, BE = CD. §. 47. Nun war angenommen AE = AD, AC = AB,

AB, und daher CE = BD, (Arith. §. 7.) folglich ist BCE = CBD, das ist, die Winkel unter der Grundlinie sind gleich, und EBC = DCB. §. 47. Nun war bewiesen ABE = ACD, folglich ist ABC = ACB. (Ar. §. 7.)

2) Wären AB, AC ungleich, etwa AB größer: so sey BF = AC. Zieht man nun CF: so ist BC = BC, und angenommen BF = AC, FBC = ACB. Folglich wäre △ FBC = △ ABC, §. 47, welches unmöglich. (Ar. §. 3.)

§. 50. Zusatz 1. In einem gleichschenklichten Triangel sind die Winkel an der Grundlinie, und wenn man die Schenkel verlängert, auch die Winkel unter der Grundlinie gleich.

§. 51. Zusatz 2. In einem gleichseitigen Triangel sind alle Winkel gleich. Und ein Triangel, der lauter gleiche Winkel hat, ist gleichseitig.

§. 52. Zusatz 3. Ein gleichseitiger Triangel, und ein Quadrat, sind reguläre Figuren. §. 26.

Der 3te Lehrsatz. Fig. 12.

§. 53. Zwey Triangel ABC, DEF, sind congruent, wenn die drey Seiten in dem einen so groß, als in dem andern sind. 8.

Beweis. Es sey AB = DE, AC = DF, BC = EF. Legt man den einen △ ABC auf den andern, daß B auf E, und BC längst EF fällt: so fällt C auf F. §. 32. Nun fällt auch A auf D, oder nicht. Im ersten Falle deckt AB die DE, AC die DF. §. 39. 42. Demnach sind die Triangel congruent, §. 27. und es ist auch A = D, B = E,

C = F. (vergl. §. 38.) Der zweyte Fall aber ist unmöglich. Denn

7. Sollte der Punkt A nicht auf D fallen: so fiel er entweder auf einen Schenkel in G, oder innerhalb der Schenkel in H, oder außerhalb in K. Im ersten Falle wäre nicht BA, d. i. EG = DE, gegen das Angenommene. Im zweyten ziehe man DH, und verlängere FH, FD nach L und M. Nun ist angenommen BA, d. i. EH = ED, und CA, d. i. FH = FD. Nach ersterm ist EDH = EHD, §. 49. nach letzterm ist MDH = LHD. §. 50. Folglich EDH < LHD, und noch < EHD, (Ax. §. 3.) welches ersterm widerspricht. Im dritten Falle ziehe man DK. Nun ist angenommen BA, d. i. EK = ED, und CA, d. i. FK = FD. Nach ersterm ist EDK = EKD, §. 49. und daher FDK < EKD, und noch < FKD; (Ax. §. 3.) nach letzterm ist FDK = FKD, §. 49. welches ersterm widerspricht. Demnach ist es unmöglich, daß der Punkt A nicht auf D fallen sollte.

§. 54. Zusatz 1. Zwey Triangel, die gleiche Seiten haben, die haben auch gleiche Winkel.

§. 55. Zusatz 2. Drey Seiten bestimmen einen Triangel, d. i. es läßt sich daraus nur ein Triangel machen, ob er wohl verschiedene Lagen haben kann.

Die 2te Aufgabe. Fig. 13. 14.

9. §. 56. Einen gegebenen Winkel BAC
10. Fig. 13. und eine gegebene gerade Linie AB Fig. 14. zu halbiren.

Auflös.

Auflös. 1) Man nehme beliebig AD = AE, §. 39. ziehe DE, beschreibe über DE einen gleichseitigen Triangel DEF, §. 46. und ziehe AF.

2) Ueber AB beschreibe man den gleichseitigen Triangel ABC, §. 46. und halbire ACB durch CE. (Auflös. 1.)

Beweis. 1) Da angenommen AD = AE, und DF = FE, auch AF = AF: so ist DAF = EAF. §. 53.

2) Da CE = CE, auch angenommen AC = CB, und ACE = ECB: so ist AE = EB. §. 47.

§. 57. Zusatz. Durch wiederholtes Halbiren läßt sich der Winkel sowohl, als die Linie, in 4, 8, 16 u. s. w. Theile theilen.

Die 3te Aufgabe. Fig. 15. 16.

§. 58. Einen Perpendikel auf eine gegebene gerade Linie AB durch einen gegebenen Punkt C zu ziehen.

Auflös. 1) Wenn der Punkt C in der Linie ist. 11.
Fig. 15. Man nehme beliebig CD = CE, §. 39. beschreibe über DE den gleichseitigen △ DEF, §. 46. und ziehe CF.

2) Wenn der Punkt C an einer Seite der Linie 12.
ist. Fig. 16. Man nehme an der entgegengesetzten Seite einen beliebigen Punkt D, und beschreibe um C mit CD einen Kreis, der AB in E und F schneidet, §. 43. halbire EF in G, §. 56. und ziehe CG.

Beweis. 1) Da angenommen CD = CE, und DF = FE, auch CF = CF: so ist DCF = FCE §. 53. = R, und CF senkrecht. §. 13.

2) Man

2) Man ziehe CE, CF. Da CG = CG, und angenommen GE = GF, auch CE = CF: §. 34. so ist EGC = CGF §. 53. = R, und CG senkrecht. §. 13.

§. 59. Anmerk. In dem Beweise wird, wie immer im folgenden, durch R ein rechter Winkel angezeigt.

§. 60. Zusatz. Von einem gleichschenklichten Triangel EFC Fig. 16. gilt folgendes:

1) Die gerade Linie CG von der Spitze nach der Mitte der Grundlinie, halbirt den Winkel an der Spitze, und steht senkrecht auf der Grundlinie.

2) Der Perpendikel CG von der Spitze auf die Grundlinie halbirt die Grundlinie, und den Winkel an der Spitze.

3) Halbirt die Linie CG den Winkel an der Spitze, so halbirt sie auch die Grundlinie, und ist senkrecht auf ihr. (vergl. §. 135.)

Der 4te Lehrsatz. Fig. 3. 8.

13. §. 61. Die Nebenwinkel ABC, ABD, Fig. 3. die eine gerade Linie AB mit einer andern CD macht, sind zusammen zwey rech-
15. ten Winkeln gleich. Und die Scheitelwinkel AEC, BED, Fig. 8. die zwey gerade Linien AB, CD, in ihrem Durchschnitte E machen, sind einander gleich.

Beweis. 1) Sind die Nebenwinkel rechte, wie Fig. 2: so ist der Satz an sich klar. Sind sie es aber nicht, wie Fig. 3: so mache man BE senkrecht. §. 58. Da CBE + EBD = 2 R §. 13. = CBE + EBA + ABD = CBA + ABD (Ar. §. 2. 1.) so ist CBA + ABD = 2 R (Ar. §. 4.)

2) Da

2) Da Fig. 8. nach (Bew. 1.) AEC + AED = 2 R = DEB + AED: so ist AEC = DEB (Ar. §. 4. 7.)

§. 62. Zusatz 1. Ist von den beyden Nebenwinkeln Fig. 2. der eine ein rechter: so ist es auch der andere. Ist Fig. 3. der eine Winkel stumpf: so ist der andere spitz, und umgekehrt; da dann der eine die **Ergänzung**, complementum, des andern **zu zwey rechten Winkeln** heißt.

§. 63. Zusatz 2. Alle Winkel Fig. 3. die mehrere Linien mit CD in B an einer Seite machen, sind zusammen = 2 R.

§. 64. Zusatz 3. Alle Winkel Fig. 8. um einen Punkt E sind zusammen = 4 R.

§. 65. Zusatz 4. Sind zwey Winkel ABC, ABD, Fig. 3. die einen Schenkel AB gemein haben, zusammen = 2 R: so sind es Nebenwinkel, oder so machen ihre übrigen Schenkel BD, BC, eine gerade Linie DC. 14.

Denn wäre dies nicht: so sey es DBF; §. 29. da denn ABD + ABF = 2 R. §. 61. Nun ist angenommen ABD + ABC = 2 R. Folglich wäre ABF = ABC, (Ar. §. 4. 7.) welches unmöglich. (Ar. §. 3.)

§. 66. Zusatz 5. Gehen an beyden Seiten der geraden Linie AB Fig. 8. aus einem Punkte E zwey andere ED, EC, so daß die in E entgegengesetzten Winkel AEC, DEB gleich sind: so sind es Scheitelwinkel, oder so machen gedachte Linien eine gerade Linie CD.

Denn

Denn da $AEC + CEB = 2\,R$, §. 61. und nach dem angenommenen $AEC = DEB$: so ist auch $DEB + CEB = 2\,R$, (Ar. §. 1.) folglich CD eine gerade Linie. §. 65.

Der 5te Lehrsatz. Fig. 17.

16. §. 67. Wird von jedem Triangel ABC eine beliebige Seite BC verlängert: so ist der äußere Winkel ACD größer, als jeder der beyden innern ihm entgegengesetzten (d. i. von
17. denen keiner sein Nebenwinkel ist.) Und: in jedem Triangel ABC sind allemal zwey Winkel zusammen kleiner, als zwey rechte.

Beweis. 1) Man halbire AC in E, ziehe BEF, daß $EF = BE$, und ziehe CF. Da nach dem angenommenen $AE = EC$, und $BE = EF$, auch die Scheitelwinkel bey E gleich: §. 61. so ist $BAE = ECF$, §. 47. folglich $BAE < ECD$. (Ar. §. 3.)

Verlängert man AC nach H, und halbirt BC: so wird auf eben die Art bewiesen, daß $ABC < BCH$. Nun ist $BCH = ACD$, §. 61. folglich ist auch $ABC < ACD$. (Ar. §. 1.)

2) Da nach dem Erwiesenen $ABC < ACD$: so ist auch $ABC + ACB < ACD + ACB$. (Ar. §. 6.) Nun ist $ACD + ACB = 2\,R$. §. 61. Folglich ist $ABC + ACB < 2\,R$. (Ar. §. 1.)

Eben so beweist man dies von jeden zwey andern Winkeln des Triangels.

§. 68. Zusatz 1. Ist in einem Triangel ein rechter oder ein stumpfer Winkel: so sind die bey-

den

den übrigen spitz; woraus erhellet, wie vielerley Triangel, in Rücksicht auf ihre Winkel, möglich sind. §. 22.

§. 69. Zusatz 2. In einem gleichschenklichten Triangel sind nothwendig die Winkel an der Grundlinie, und in einem gleichseitigen alle drey Winkel spitz.

§. 70. Zusatz 3. Auf einer geraden Linie AB Fig. 18. 19. ist durch einen Punkt C nur ein Perpendikel CD möglich.

Denn wäre außer CD noch ein anderer Perpendikel CE: so wären Fig. 18. im △ CDE zwey rechte Winkel bey E und D, gegen §. 67. und Fig. 19. wäre ECB = DCB, §. 33. gegen (Ar. §. 3.)

§. 71. Zusatz 4. Macht Fig. 19. eine gerade Linie DF mit einer andern AB ungleiche Nebenwinkel: so fällt ein Perpendikel DC auf die andere von jedem Punkte der ersten, an die Seite des spitzen Winkels.

Denn fiel er an die Seite des stumpfen, etwa wie DG: so wären im △ DFG die beyden Winkel bey F und G zusammen > 2 R, gegen §. 67.

Der 6ste Lehrsatz. Fig. 20.

§. 72. In jedem Triangel ABC steht der 18.
größern Seite auch ein größerer Winkel; dem 19.
größern Winkel auch eine größere Seite gegenüber. Und in jedem Triangel BDC sind alle- 20.
mal zwey Seiten zusammen größer als die dritte.

Beweis.

Beweis. 1) Ist AC > AB: so mache man AD = AB, und ziehe BD. Nun ist ABD = ADB, §. 49. und ADB > ACB. §. 67. Folglich ist ABD > ACB, (Ar. §. 1.) folglich noch vielmehr ABC > ACB. (Ar. §. 3.)

2) Ist ABC > ACB: so ist weder AC = AB, weil sonst ABC = ACB; §. 49. noch AC < AB, weil sonst ABC < ACB (Bew. 1.). Folglich ist nothwendig AC > AB.

3) Man verlängre eine Seite CD, mache DA = DB, und ziehe BA. Nun ist ABD = BAD, §. 49. folglich ABC > BAD, (Ar. §. 3.) folglich AC > BC (Bew. 2.). Nun ist AC = AD + DC = BD + DC. Folglich ist BD + DC > BC. (Ar. §. 1.)

Eben so wird der Beweis von jeden zwey andern Seiten des Δ BDC geführt.

§. 73. Zusatz 1. Der Perpendikel CD Fig. 18. von einem Punkte C auf eine gerade Linie AB, ist die kürzeste Linie, und heißt der **Abstand** oder die **Entfernung** des Punktes. Denn für jede andre Linie CE ist CED spitz, §. 68. folglich CE > CD. §. 72.

§. 74. Zusatz 2. An jeder Seite des Perpendikels CD Fig. 18. giebt es nur eine gerade Linie von C, die mit AB einen gegebenen Winkel macht. Denn es sey die Linie CF, und der Winkel CFD, und man mache DG = DF: so ist CG = CF, und CGD = CFD. §. 47. Für jeden nähern Punkt E, ist CE < CF, und CED > CFD; für jeden weitern Punkt H, ist CH > CF, und CHD < CFD. §. 72. 67.

§. 75. Zusatz 3. Der Unterschied zweyer Seiten eines Triangels ABC Fig. 20. ist kleiner, als die dritte. Denn ist $AC > AB$, und man macht $AD = AB$: so ist $DC = AC - AB$, und ADB spitz, §. 69. folglich BDC stumpf, §. 62. folglich $BC > DC$. §. 72.

§. 76. Zusatz 4. Gehen Fig. 20. von einem 21. Punkte innerhalb eines Triangels BAC gerade Linien EB, EC, nach den Endpunkten der Grundlinie BC: so sind sie zusammen kleiner, als die beyden Schenkel des Triangels AB, AC, schliessen aber einen größern Winkel ein.

Denn wird BE nach D verlängert: so ist $BEC > D > A$. §. 67. Auch ist $BA + AD > BD$, §. 72. oder $> BE + ED$, und $DC + DE > EC$. §. 67. Folglich ist $BA + AD + DC + DE > BE + ED + EC$, folglich $BA + AC > BE + EC$. (Ar. §. 8.)

Die 4te Aufgabe. Fig. 21.

§. 77. Man soll aus drey gegebenen Li- 22. nien A, B, C, deren immer zwey zusammen größer als die dritte sind, (§. 72.) einen Triangel verzeichnen. Und man soll einen gegebenen 23. Winkel H an einen gegebenen Punkt D legen.

Auflös. 1) Man ziehe eine gerade Linie DE, mache $DF = A$, beschreibe aus F mit $FG = B$, und aus D mit $DG = C$ Kreisbogen, die sich in G schneiden, und ziehe GF, GD.

2) Auf den Schenkeln des gegebenen Winkels nehme man beliebige Punkte L, K, und ziehe KL.

Aus den drey Seiten beschreibe man den △ DFG, daß DF = HK, FG = KL, LH = GD. (Auflös. 1.)

Beweis. 1) Da B + C > A: so schneiden sich die Kreise, §. 45. und es ist DF = A, FG = B, GD = C.

2) Da DF = HK, FG = KL, LH = GD: so ist GDF = LHK. §. 53.

Der 7te Lehrsatz. Fig. 22. a. b.

24. §. 78. Sind zwey Seiten eines Triangels LK, LH, so groß, als zwey Seiten eines andern GF, GM; aber entweder der von solchen Seiten eingeschlossene Winkel in dem einen KLH größer als in dem andern FGM; oder
25. die dritte Seite des einen KH größer als die dritte Seite des andern FM: so steht im ersten Fall dem größern Winkel KLH auch eine größere Seite KH, und im zweyten der grössern Seite KH auch ein größerer Winkel KLH gegenüber.

Beweis. 1) Ist KLH > FGM: so mache man FGD = KLH, §. 77. und GD = LH = GM. Ziehet man nun MD, FD: so ist FD = KH, §. 47. und fällt entweder Fig. 22. b. über FM, oder Fig. 22. a. auf oder unter FM. Ist das erste: so ist GMD = GDM, §. 49. folglich FMD > GDM, und noch > FDM, (Ar. §. 3.) folglich FD > FM. §. 72. Nun war FD = KH. Folglich ist auch KH > FM. (Ar. §. 1.) Ist das zweyte: so ist offenbar FD, d. i.

KH

KH > FM. Ist das dritte: so ist GD + DF > GM + MF. §. 76. Nun war GD = GM angenommen. Folglich ist DF d. i. HK > MF. (Ar. §. 8.)

2) Ist KH > FM: so ist weder KLH = FGM, weil sonst KH = FM; §. 47. noch KLH < FGM, weil sonst KH < FM (Bew. 1.) wäre. Folglich ist nothwendig KLH > FGM.

§. 79. Zusatz. Hat man Fig. 23. und 22. (11, 22.) d. drey Winkel BAN, FGM, KLH, deren zwey zusammen allemal größer als der dritte sind, und man macht ihre Schenkel sämmtlich einander gleich: so läßt sich aus den Linien BN, FM, KH, womit man die Endpunkte der Schenkel verbindet, ein Triangel verzeichnen.

Es ist nämlich hier blos zu beweisen, daß zwey dieser Linien zusammen allemal größer als die dritte sind. §. 77.

Nun sind die drey Winkel entweder gleich oder ungleich. Ist das erste: so sind auch obgedachte drey Linien einander gleich, §. 47. folglich offenbar zwey davon größer als die dritte. Ist aber das zweyte: so mache man MGD = BAN, §. 77. GD = GF, und ziehe DF, DM; da denn DM = BN. §. 47. Nun ist angenommen BAN + FGM d. i. MGD + FGM d. i. FGD > KLH, und daß die Schenkel der Winkel gleich sind. Folglich ist FD > KH. §. 78. Nun ist FM + MD d. i. FM + BN > FD. §. 72. Folglich noch vielmehr FM + BN > KH.

Der 8te Lehrsatz. Fig. 23.

26. §. 80. Zwey Triangel ABC, GFD, sind congruent, wenn zwey Winkel und eine gleichliegende Seite in dem einen so groß, als in dem andern sind.

Beweis. Es sey ABC = GFD, ACB = GDF, und

1) BC = FD (die anliegende Seite), so ist auch AB = GF, folglich die Triangel congruent. §. 47. Denn wäre AB > GF: so sey BE = FG. Zieht man nun CE: so ist angenommen BC = FD, BE = FG, EBC = GFD, folglich ECB = GDF. §. 47. Nun ist auch angenommen ACB = GDF. Folglich wäre ACB = ECB, (Ar. §. 4.) welches unmöglich. (Ar. §. 3.)

2) AB = GF (die entgegengesetzte Seite), so ist auch BC = FD, folglich die Triangel congruent. §. 47. Denn wäre BC > FD: so sey BN = FD. Zieht man AN: so wäre, wie zuvor, ANB = GDF = ACB, gegen §. 67.

Der 9te Lehrsatz. Fig. 24.

§. 81. Zwey gerade Linien AB, CD, sind parallel, wenn sie mit einer dritten EF, die sie
28. schneidet, entweder die beyden innern Winkel GHD, HGB, zusammen zwey rechten, oder den äußern Winkel EGB, dem innern entge-
27. gengesetzten GHD, oder die Wechselswinkel AGH, GHD, einander, gleich machen.

Beweis. Träfen die Linien AB, CD, auf der Seite der zuerst gedachten Winkel zusammen, und machten

machten da mit GH einen Triangel: so wären nach der ersten Bedingung zwey innere Winkel = 2 R, und nach den beyden übrigen ein äußerer Winkel einem innern entgegengesetzten gleich; beydes gegen §. 67. Eben so wenig aber können sie auf der entgegengesetzten Seite zusammentreffen, und daselbst mit GH einen Triangel machen; weil die gedachten Winkel auf dieser Seite eben so beschaffen sind. Denn da die beyden innern Winkel auf dieser Seite nebst den beyden an jener = 4 R, §. 61. und letztere nach der ersten Bedingung = 2 R: so sind erstere auch = 2 R. (Ar. §. 7.) Da ferner AGE + EGB = CHG + GHD = 2 R, §. 61. und nach der zweyten Bedingung EGB = GHD: so ist auch hier AGE = CHG (Ar. §. 7.) der äußere dem innern entgegengesetzten gleich. Endlich ist nach der dritten Bedingung unmittelbar AGH = GHD, oder die Wechselswinkel einander gleich.

Anmerk. Hat man den Satz für eine der drey Bedingungen, z. E. für die erste, erwiesen: so kann man die übrigen auf die erwiesene zurückführen. Denn ist

1) EGB = GHD: so ist EGB + BGH = GHD + BGH. (Ar. §. 5.) Nun ist EGB + BGH = 2 R, §. 61. folglich ist auch GHD + BGH = 2 R. (Ar. §. 4.)

Ist 2) AGH = GHD: so ist AGH + BGH = GHD + BGH. (Ar. §. 5.) Aber AGH + BGH = 2 R, §. 61. folglich ist auch GHD + BGH = 2 R. (Ar. §. 4.)

§. 82. Zusatz. Aufgabe: Durch einen gege- 31.
benen Punkt G eine gerade Linie mit einer gegebenen CD parallel zu ziehen, nehme man beliebig H, ziehe GH, und mache HGA = GHD. §. 77.

Der 10te Lehrsatz. Fig. 25.

§. 83. Wenn zwey gerade Linien AB, CD, mit einer dritten EF, die sie schneidet, zwey innere entgegengesetzte Winkel BGH, DHG, zusammen kleiner als zwey rechte machen: so laufen sie genugsam verlängert auf dieser Seite zusammen. (Euklids 11ter Grundsatz.)

Beweis. Da BGH + DHG < 2R, und EGB + BGH = 2R: §. 61. so ist EGB + BGH > BGH + DHG, folglich EGB > DHG, (Ar. §. 8.) und, weil AGH = EGB, §. 61. auch AGH > DHG. (Ar. §. 1.)

Macht man also EGK = DHG, und verlängert KG nach L, daß LK mit CD parallel: §. 82. so fällt LK zwischen die Schenkel der Winkel EGB, AGH, und macht mit GB einen Winkel LGB, zwischen dessen Schenkeln der Punkt H, durch den die CD geht, befindlich ist. Diese muß also einen Schenkel des Winkels LGB schneiden. §. 44. Nun kann sie LG, mit der sie parallel ist, nicht schneiden. §. 12. Folglich schneidet sie GB, und trift also mit AB an dieser Seite zusammen.

§. 84. Zusatz 1. Ist Fig. 25. EGB oder AGH > GHD: so ist (weil EGB + BGH oder AGH + BGH = 2R, §. 61.) GHD + BGH < 2R; folglich die Linien AB, CD, an dieser Seite convergent.

Anmerk. Daß zwey convergente Linien mit einer dritten, die sie schneidet, Winkel von obgedachter Beschaffenheit machen, ist bereits §. 67. erwiesen worden.

§. 85.

§. 85. Zusatz 2. Durch einen Punkt G Fig. 24. geht mit einer Linie CD nur eine AB parallel. Und eine Linie EF, die eine von zwey Parallelen AB, CD, schneidet, schneidet auch die andere.

§. 86. Zusatz 3. Wenn zwey Linien AB, CD, 29.
Fig. 24. parallel sind; so machen sie mit einer dritten EF, die sie schneidet, sowohl die beyden innern Winkel zwey rechten, als auch den äußern Winkel dem innern entgegengesetzten, und die beyden Wechselwinkel einander gleich. Denn wären gedachte Winkel nicht so beschaffen: so müßten die Linien convergiren, §. 83. 84. und wären daher nicht parallel, §. 11. gegen das Angenommene.

§. 87. Zusatz 4. Sind zwey Linien AB, CD, 30.
Fig. 26. mit einer dritten EF parallel: so sind sie selbst parallel. Denn es schneide sie die gerade Linie GHK: so ist AGH = GHF, und GHF = HKD, §. 86. folglich AGH = HKD, (Ar. §. 4.) folglich AB, CD, parallel. §. 81.

§. 88. Zusatz 5. Parallelen zwischen Parallelen Fig. 27. sind gleich. Denn zieht man AC: so ist BAC = ACD, und BCA = CAD, §. 86. auch CA = CA; folglich AB = CD, BC = AD. §. 80.

§. 89. Zusatz 6. Ist Fig. 27. AB = CD, und AD = CB: so ist (weil auch AC = AC) BAC = ACD, und BCA = CAD, §. 80. folglich AB mit CD, und AD mit CB parallel. §. 81. Folglich AB, CD ein Parallelogramm. §. 24.

§. 90. Zusatz 7. Aufgabe: Durch A mit BE Fig. 27. eine Parallele zu ziehen, nehme man beliebig BC, und beschreibe Kreise aus A mit BC, und aus C mit BA, die sich in D schneiden, und ziehe AD. (vergl. §. 82.)

46. Hieraus sieht man leicht, wie aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ein Parallelogramm, und aus einer Seite das Quadrat beschrieben wird.

33. §. 91. Zusatz 8. Sind AD, BC, Fig. 27. gleich und parallel: so sind auch AB, CD gleich und parallel. Denn zieht man AC: so hat man AD = BC, AC = AC, CAD = BCA, §. 86. folglich ACD = BAC, und CD = BA, §. 47. folglich AB, CD gleich und parallel. §. 81.

§. 92. Zusatz 9. Zwey Perpendikel GH, GH Fig. 7. zwischen Parallelen AF, DK sind parallel und gleich. Denn sie machen mit jeder Parallele rechte Winkel, §. 86. und sind folglich parallel, §. 81. folglich auch gleich. §. 88.

Daher haben Parallelogramme, wie auch Triangel, zwischen einerley Parallelen AF, DK, Fig. 7. einerley Höhe. §. 25. Und haben sie einerley Höhe: so sind sie zwischen einerley Parallelen. §. 91.

§. 93. Zusatz 10. Zwey Perpendikel DF, EF, Fig. 39. auf zwey convergenten Linien AB, BC, laufen allemal zusammen.

Denn wären sie parallel: so müßte EF auch auf BA, d. i. BA auf EF, senkrecht seyn. §. 86. Nun ist BC, die von AB unterschieden ist, auch auf EF senkrecht, vermöge des Angenommenen.

Folglich

Folglich wären von einem Punkte B zwey Perpendikel auf EF, welches unmöglich. §. 70.

§. 94. Zusatz 11. Ein Parallelogramm ABCD Fig. 27. wird durch die Diagonale AC in zwey congruente Triangel getheilt. §. 88. 53. Die gegenüberstehenden Seiten und Winkel sind gleich, und die an einer Seite liegenden Winkel sind = 2 R. §. 86. 34.

§. 95. Zusatz 12. Ein Parallelogramm ABCD Fig. 27. wird durch jede beliebige gerade Linie HK, die durch die Mitte der Diagonale G geht, halbirt. Denn da bey G Scheitelwinkel, und GAH, GCK Wechselwinkel, auch AG = GC: so ist △ AGH = △ KGC. §. 80. Folglich ist ACD oder ½ ABCD = CDHK. (Ar. §. 7. 5.)

§. 96. Zusatz 13. Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel, hat lauter rechte Winkel. Und in einem Quadrate halbirt die Diagonale den rechten Winkel.

§. 97. Zusatz 14. Aufgabe: Aus einem Winkel des Parallelogramms B Fig. 27. und den beyden einschließenden Seiten CB, BA, das Parallelogramm zu verzeichnen, (vollenden) ziehe man AC, und beschreibe den △ ACD = ABC, wie §. 90.

Anmerk. Ist der Winkel B schief, und die Seiten ungleich: so entsteht das Rhomboid; sind aber die Seiten gleich, der Rhombus. Ist B ein rechter Winkel, und die Seiten ungleich: so entsteht das Rectangel; sind aber die Seiten gleich, das Quadrat. Hieraus erhellet die Möglichkeit der vierseitigen Figuren, §. 23. die allein Parallelogramme sind.

Der 11te Lehrsatz. Fig. 27.

32. §. 98. In jedem Triangel ABC sind alle drey Winkel zusammen zwey rechten gleich; und es ist, wenn man eine Seite BC verlängert, der äußere Winkel ACE, den beyden innern entgegengesetzten zusammen gleich.

Beweis. 1) Durch A ziehe man DF mit BC parallel: §. 82. so ist FAB = ABC, und DAC = BCA, §. 86. folglich FAB + DAC + BAC = ABC + BCA + BAC. (Ar. §. 5.) Nun sind erstere drey Winkel = 2 R, §. 63. folglich auch die drey letztern.

2) Die drey innern Winkel sind dem äußern Winkel nebst seinem Nebenwinkel gleich, weil sie beyderseits = 2 R; (Bew. 1. und §. 61.) folglich, wenn man den Nebenwinkel wegnimmt, die beyden innern entgegengesetzten Winkel dem äußern gleich. (Ar. §. 7.)

§. 99. Zusatz 1. Ist ein Winkel in dem einen Triangel so groß, als in dem andern: so sind die beyden übrigen zusammen in dem einen so groß, als in dem andern. Und sind zwey Winkel zusammen in dem einen Triangel so groß, als in dem andern: so ist auch der dritte Winkel in dem einen so groß, als in dem andern.

§. 100. Zusatz 2. Ist in einem gleichschenklichten Triangel ein Winkel gegeben: so sind sie alle gegeben.

§. 101. Zusatz 3. In einem rechtwinklichten Triangel betragen die beyden spitzen Winkel einen rechten. Ist solcher Triangel auch gleichschenklicht: so

so beträgt jeder der spitzen Winkel die Hälfte eines rechten.

§. 102. Zusatz 4. In einem gleichseitigen Triangel beträgt jeder Winkel $\frac{2}{3}$ eines rechten. Ein rechter Winkel wird daher in drey gleiche Theile getheilt, wenn man über einen Schenkel desselben einen gleichseitigen Triangel beschreibt.

§. 103. Zusatz 5. In jeder geradlinichten Figur, Fig. 28. 29. betragen alle Winkel zusammen doppelt so viel rechte Winkel, als die Figur Seiten hat, weniger vier rechten. Denn zieht man von einem beliebigen Punkte innerhalb der Figur gerade Linien nach allen Winkeln: so erhält man so viel Triangel, als die Figur Seiten hat. In jedem aber betragen die Winkel zwey rechte, §. 98. folglich alle Winkel, die man dadurch erhält, doppelt so viel rechte, als die Figur Seiten hat. Weil aber die Winkel um den angenommenen Punkt, die zusammen vier rechte betragen, §. 64. nicht mit zu den Winkeln der Figur gehören: so muß man von obiger Summe noch vier rechte hinwegnehmen.

§. 104. Anmerk. Die Winkel in Fig. 28. sind alle auswärts gehende, deren Schenkel verlängert außerhalb der Figur gehen. Die Fig. 29. aber enthält auch einwärts gehende, deren Schenkel verlängert in die Figur hineingehen. Die Größe eines jeden Winkels, gegen einen angenommenen Punkt innerhalb der Figur, beträgt bey diesen Fig. 29. mehr, bey jenen Fig. 28. weniger, als zwey rechte. Man kann aber von jedem Winkel entweder das rechnen, welches auch am gewöhnlichsten ist, was er weniger als zwey rechte beträgt, angulus concavus, oder, welches auch zuweilen vorkömmt, das, was er über zwey rechte beträgt, und mit jenem vier rechte ausmacht, angulus gibbus seu convexus.

§. 105.

§. 105. Zusatz 6. Verlängert man die Seiten einer geradlinichten Figur mit lauter auswärts gehenden Winkeln, wie Fig. 28: so betragen die äußern Winkel zusammen allemal vier rechte. Denn jeder äußere beträgt mit seinem Nebenwinkel zwey rechte, §. 61. folglich alle äußere mit allen innern zusammen doppelt so viel rechte, als die Figur Seiten hat. Eben so viel aber betragen die innern Winkel, wenn dazu vier rechte kommen. §. 103. Folglich müssen die äußern vier rechte betragen.

Der 12te Lehrsatz. Fig. 30.

35. §. 106. Parallelogramme, wie auch Trian-
bis gel, die gleiche Grundlinien und gleiche Höhen
38. haben, sind einander gleich, nemlich gleichen Inhalts.

Beweis. 1) Stehen die Parallelogramme ABCD, BCFE, über einer Grundlinie BC, und ist E in der verlängerten AD: so schneidet BE die CD in G. Nun ist AB = DC, BE = FC, und (weil AD = BC = EF) auch AE = DF, folglich △ABE = △DCF. §. 53. Nimmt man von beyden den △DGE, und thut hinzu den △CBG: so ist ABCD = BCFE. (Ar. §. 7. 5.) Eben so und noch leichter wird der Satz bewiesen, wenn E in D, oder zwischen A und D fällt.

Hieraus folgt der Satz auch für die Triangel ABC, EBC, als welche die Hälften der Parallelogrammen sind, §. 94. folglich auch einander gleich seyn müssen. (Ar. §. 11.)

2) Stehen

2) Stehen die Parallelogramme ABCD, EFHK, über gleichen Grundlinien BC, KH: so sind sie beyde dem Parallelogramm BCFE gleich, (Bew. 1.) folglich auch einander gleich. (Ar. §. 4.)

Hieraus folgt der Satz auch für die Triangel ABC, FKH. (Ar. §. 11.)

§. 107. Zusatz 1. Wäre BC > KH: so wäre auch ABCD > EFKH, und △ ABC > FKH. Auch sind Quadrate gleich, wenn sie gleiche Seiten haben; und haben gleiche Seiten, wenn sie gleich sind.

§. 108. Zusatz 2. Triangel ABC, FKH, 39.
Fig. 30. gleichen Inhalts und über gleichen Grund- 40.
linien, haben gleiche Höhe, oder stehen zwischen einerley Parallelen. (vergl. §. 92.) Denn wäre AF nicht parallel mit BH: so sey es AL. Zieht man nun HL: so wäre △ ABC = △ LHK, §. 106. folglich △ LHK = △ FKH gegen (Ar. §. 3.)

§. 109. Zusatz 3. Ein Parallelogramm AB 41.
CD Fig. 30. ist doppelt so groß, als ein △ EBC, der mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

§. 110. Zusatz 4. Aufgabe: Ein Parallelo- 42.
gramm zu machen, das einem gegebenen △ ABC Fig. 31. gleich sey, und einen gegebenen Winkel B habe; halbire man BC in E, mache CEF = B, §. 77. und ziehe AG mit BC, CG mit EF parallel; §. 82. da denn ECGF = 2 △ AEC §. 109. = △ ABC. §. 106.

Anmerk. Man sagt alsdenn: der △ ABC sey in das Parallelogramm ECGF verwandelt worden.

Der

Der 13te Lehrsatz. Fig. 32.

43. §. 111. Zieht man in einem Parallelogramm AC, durch einen beliebigen Punkt der Diagonale E, mit den Seiten BC, BA, die Parallelen FG, HK: so sind die Complemente AE, EC, gleich. (Es entstehen nemlich zwey Parallelogramme, GK, FH, um die Diagonale, und noch zwey andere AE, EC, wodurch die Diagonale nicht geht, und welche die Complemente eines jeden der vorigen heißen.)

Beweis. Da △ ABD = CBD, △ KED = GED, und △ FBE = HBE, §. 94. folglich △ KED + FBE = △ GED + HBE; (Ax. §. 5.) so ist AE = EC. (Ax. §. 7.)

§. 112. Zusatz 1. Ist AC ein Rhombus: §. 23. so ist ABE = ADB §. 49. = BEF, §. 86. folglich BF = FE, §. 49. folglich FH auch ein Rhombus. §. 94. 23. Eben so ist CDB = CBD = GED, folglich EG = GD, und GK auch ein Rhombus.

§. 113. Zusatz 2. Ist AC ein Quadrat: so wird auf eben die Art bewiesen, daß auch FH,
(2,4.) GK Quadrate sind. Hieraus erhellet zugleich; wenn eine Linie BC beliebig in H geschnitten ist, daß das Quadrat solcher Linie AC aus den Quadraten der beyden Abschnitte BH, HC, und aus dem doppelten Rectangel aus beyden Abschnitten bestehe.

44. §. 114. Zusatz 3. Aufgabe: Um einen △ ABC Fig. 31. in ein Parallelogramm zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel B und eine gegebene

Seite

Seite BC habe, mache man Fig. 32. AE = ABC, daß F = B, §. 110. verlängere AK bis KD = BC, ziehe DE, und verlängere sie, bis sie die verlängerte AF in B trift. Durch B und D ziehe man BC, mit AD, DC mit AB parallel, und verlängere FE, KE: so ist §. 111. EC = AE = △ABC, EG = DK = BC, und EHG = AFE = B.

§. 115. Zusatz 4. Aufgabe: Um eine jede 45. geradlinichte Figur ABCDEF, Fig. 33. in ein Parallelogramm, wovon eine Seite und ein Winkel vorgeschrieben ist, zu verwandeln, theile man die Figur durch Diagonalen in Triangel, und verfahre mit jedem Triangel nach §. 114. Die dadurch erhaltenen einzelnen Parallelogramme lassen sich, wie CE, GK, Fig. 32. mit ihren gleichen Seiten EG, EG zusammenschieben, daß die ungleichen HE, EK, wegen der gleichen Winkel, in gerader Linie HK liegen.

§. 116. Zusatz 5. Aufgabe: Um den Unterschied zweyer geradlinichten Figuren ABEF, BCDE Fig. 33. zu finden, verwandle man jede in ein Parallelogramm, wie §. 115. Gesetzt, es wäre Fig. 33. 32. ABEF = CK, und BCDE = GK: so wäre CE der gesuchte Unterschied.

Der 14te Lehrsatz. Fig. 34.

§. 117. In einem rechtwinklichten Trian- 47. gel ABC ist der Hypotenuse (der dem rechten Winkel gegenüberstehenden Seite) Quadrat BE so groß, als beyder Catheten (der den rechten

Winkel

Winkel einschließenden Seiten) Quadrate BG, AK zusammengenommen.

Beweis. AL mit CE parallel, theilt BE in zwey Rectangel, deren eins BL = BG, das andre CL = AK.

Denn zieht man 1) AD, CF: so ist △ ABD = $\frac{1}{2}$ BL, §. 109. und, weil GA mit AC in gerader Linie, §. 65. △ FBC = $\frac{1}{2}$ BG. §. 109. Nun ist AB = BF, BD = BC, und wenn man ABC dem rechten Winkel jeder Figur beyfügt, ABD = FBC, und daher △ ABD = △ FBC. §. 47. Folglich ist auch BL = BG. (Ar. §. 11.)

Zieht man 2) AE, BK: so wird völlig auf eben die Art bewiesen, daß CL = AK.

Demnach ist BL + CL, d. i. BE = BG + AK. (Ar. §. 5.) Oder BCq = BAq + ACq.

Anmerk. Der Satz heißt, von seinem Erfinder, theorema Pythagoricum, und zeigt zugleich, daß die Quadrate der Hypotenuse, und jeder Cathete, um das Quadrat der andern Cathete unterschieden sind.

48. §. 118. Zusatz 1. Ist Fig. 35. BCq = BAq + ACq: so ist BAC = R. Denn macht man CAD = R, §. 58. AD = AB, und zieht DC: so ist CDq = ADq + ACq = BAq + ACq = BCq, folglich CD = CB, §. 107. folglich BAC = CAD = R. §. 53.

§. 119. Zusatz 2. Aufgabe: Um ein Quadrat zu finden, das so groß als zwey gegebene ist: setze man Fig. 35. die gegebenen Seiten BA, AC, rech-

rechtwinklicht zusammen: so ist BC die Seite des gesuchten Quadrats. §. 117.

§. 120. Zusatz 3. Aufgabe: Um ein Quadrat zu finden, das dem Unterschiede zweyer gegebenen gleich ist, setze man Figur 35. auf die Seite des kleinern DA den Perpendikel AC, und durchschneide ihn mit der Seite des größern DC in C: so ist AC die Seite des gesuchten Quadrats. §. 117.

Das II. Capitel.

Vom Kreise.

(Euklids Elem. 3. Buch.)

Erklärungen.

§. 121. Eine Sehne, chorda, des Kreises ist jede gerade Linie AB, Fig. 36. die nicht durch den Mittelpunkt C geht, und an beyden Enden vom Umkreise begränzt wird.

§. 122. Ein **Kreisbogen** ist jedes Stück des Umkreises, wie ADB.

§. 123. Ein **Kreisabschnitt**, segmentum, ist die Figur, die von der Sehne AB, als der **Grundlinie**, und dem Kreisbogen ADB eingeschlossen ist. 6.

Anmerk. Jede Sehne theilt den Kreis in zwey entgegengesetzte ungleiche Abschnitte ADB, AEB, wovon letzterer den Mittelpunkt des Kreises enthält, und der größere ist.

§. 124. Ein **Kreisausschnitt**, sector, ist die Figur, die von zwey Halbmessern EC, CF, und dem Kreisbogen EF eingeschlossen ist. 10.

8. §. 125. Der Winkel im Abschnitte ADB, oder den der Abschnitt enthält, heißt, dessen Scheitel D im Kreisbogen ist, und dessen Schenkel die Endpunkte der Grundlinie AB treffen; und man sagt von ihm, er stehe auf dem übrigen Bogen AEB.

11. §. 126. Aehnliche Abschnitte heißen, die gleiche Winkel enthalten.

§. 127. Ein Winkel am Umkreise ADB, oder Peripheriewinkel, heißt, dessen Scheitel D im Umkreise ist, und dessen Schenkel auf einem Bogen des Kreises AEB stehen, wie §. 125.

§. 128. Ein Winkel am Mittelpunkte ECF, oder Centriwinkel, heißt, dessen Scheitel im Mittelpunkte C ist, und dessen Schenkel auf einem Bogen des Kreises EF stehen.

§. 129. Concentrische Kreise heißen, die um einen Mittelpunkt mit verschiednen Halbmessern gezogen sind.

3. §. 130. Kreise berühren sich, wenn ihre Umringe an einander treffen, ohne sich zu schneiden.

2. §. 131. Eine Tangente, oder Berührungslinie, des Kreises, ist jede gerade Linie, die den Umring trift, und verlängert, ihn nicht schneidet.

(4,7.) §. 132. Ist eine gerade Linie AB an beyden Enden vom Umringe des Kreises begränzt, so sagt man: sie sey im Kreise eingetragen.

(4,3.6.) §. 133. Sind die Scheitel aller Winkel einer geradlinichten Figur in eines Kreises Umringe, so sagt man: die Figur sey in dem Kreise, und der Kreis um die Figur beschrieben.

§. 134.

§. 134. Sind alle Seiten einer geradlinich- (4, 4. 5.)
ten Figur Tangenten eines Kreises, so sagt man: die Figur sey **um den Kreis**, und der Kreis **in die Figur** beschrieben.

Der 1ste Lehrsatz. Fig. 37.

§. 135. Eine gerade Linie EF halbirt die 3.
Sehne eines Kreises AB, wenn sie durch den Mittelpunkt C geht, und auf der Sehne senkrecht ist; und ist auf ihr senkrecht, wenn sie durch den Mittelpunkt geht, und die Sehne halbirt; und geht durch den Mittelpunkt, wenn sie auf der Sehne in ihrer Mitte D senkrecht ist.

Beweis. 1) CA = CB, folglich A = B. §. 49. Nun sind bey D rechte Winkel, und CD = CD. Folglich ist AD = DB. §. 80.

2) CA = CB, AD = DB, CD = CD. Folglich die Winkel bey D gleich. §. 53. Folglich CD senkrecht. §. 13.

3) Wäre der Mittelpunkt außerhalb EF, etwa in G, und man zieht GD: so ist solche auf AB senkrecht (Bew. 2.) gegen §. 70.

Anmerk. Hierin liegen auch die Eigenschaften eines gleichschenklichten Triangels. §. 60.

§. 136. Zusatz 1. Aufgabe: Um den Mittel- 1.
punkt eines Kreises zu finden, ziehe man eine beliebige Sehne AB, halbire sie in D, und ziehe durch D senkrecht die EF, welche halbirt den Mittelpunkt C giebt.

2. §. 137. Zusatz 2. Jede gerade Linie AB, die zwey Punkte des Umkreises verbindet, fällt ganz innerhalb des Kreises. Denn sucht man den Mittelpunkt C, §. 136. und der Sehne Mitte D, zieht CA, CB, CD: so ist CD senkrecht, folglich nicht nur diese, sondern auch jede andre, von C nach irgend einem Punkte der Sehne zwischen A und B < AC. §. 73. 74.

§. 138. Zusatz 3. Jede gerade Linie schneidet den Kreis nur in zwey Punkten.

4. §. 139. Zusatz 4. Schneiden sich zwey Sehnen AB, CD: Fig. 38. so kann ihr Durchschnitt E nicht in beyder Mitte zugleich seyn. Denn sucht man den Mittelpunkt F, §. 136. und zieht FE: so wäre sonst FED = FEB = R, §. 135. gegen (Ar. §. 3.)

(4,5.) §. 140. Zusatz 5. Aufgabe: Um durch drey gegebene Punkte A, B, C, Fig. 39. (die nicht in einer geraden Linie liegen, §. 138.) einen Kreis zu beschreiben, ziehe man AB, BC, halbire sie in D und E, und mache DF, EF senkrecht, die sich in irgend einem Punkte F schneiden müssen. §. 93. Nun ist der Mittelpunkt des Kreises durch A, B, C, in DF und EF, §. 135. folglich in ihrem Durchschnitt F, und FA = FB = FC, der Halbmesser dieses Kreises.

25. §. 141. Zusatz 6. Drey Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen einen Kreis, und geben zugleich seinen Mittelpunkt und Halbmesser.

§. 142.

§. 142. Zusatz 7. Gehen von einem Punkte 9.
F Fig. 39. an einen Kreis drey gleiche gerade Linien FA, FB, FC: so ist solcher der Mittelpunkt dieses Kreises. Denn zieht man AB, BC, halbirt sie in D und E, und zieht DF, EF: so sind beyde senkrecht. §. 53. Folglich ist in beyden der Mittelpunkt des Kreises, §. 135. folglich in ihrem gemeinschaftlichen Punkte F.

§. 143. Zusatz 8. Von jedem Punkte, der nicht der Mittelpunkt eines Kreises ist, lassen sich nicht drey gleiche gerade Linien an diesen Kreis ziehen, weil solcher sonst der Mittelpunkt des Kreises wäre, §. 142. gegen das Angenommene.

§. 144. Es sey solcher Punkt zuerst innerhalb 7.
des Kreises, wie A. Fig. 40. Man suche den Mittelpunkt C, §. 136. ziehe AC, und verlängere sie nach B und D. Nimmt man nun im Umkreise zwischen B und D beliebig zwey Punkte E, F, und zieht AE, AF, CE, CF: so ist AC + CF, d. i. AB > AF, §. 72. und eben so AC + AE > CE, d. i. > CA + AD, folglich AE > AD. (Ar. §. 8.) Nun ist CF = CE, CA = CA, aber FCA > ECA. Folglich ist AF > AE. §. 78. Demnach ist unter allen Linien von A an den Kreis AB die größte, AD die kleinste, die übrigen aber werden desto größer, je weiter sie von der kleinsten, oder desto kleiner, je weiter sie von der größten abweichen. Nun mache man ACG = ACE, §. 77. und ziehe AG: so ist diese, aber nach dem Erwiesenen keine andre, der AE gleich. §. 47.

8. §. 145. Es sey solcher Punkt zweytens außerhalb des Kreises wie A, Fig. 41. und man ziehe AD durch den Mittelpunkt C, desgleichen CE, CF, CG, CH: so ist $AE + EC > AC$, d. i. $> AB + BC$, §. 72. folglich $AE > AB$; und $AF + FC > AE + EC$, §. 76. folglich $AF > AE$. Desgleichen ist $AC + CH$ d. i. $AD > AH$, §. 72. und (weil $ACH > ACG$) $AH > AG$. §. 78. Demnach ist unter allen Linien von A nach der äußern Peripherie AB die kleinste, und jede desto größer, je weiter sie von AB abweicht; nach der innern Peripherie aber AD die größte, und jede desto kleiner, je weiter sie von AD abweicht. Auch wird eben so wie §. 144. erwiesen, daß zu beyden Seiten der AB oder AD nur zwey gleiche Linien von A an den Kreis gezogen werden können.

§. 146. Es sey solcher Punkt drittens im Umkreise, wie A: Fig. 42. so wird eben so bewiesen, daß AB durch den Mittelpunkt C die größte, und jede andere desto kleiner sey, je weiter sie von AB abweicht; auch daß zu beyden Seiten der AB nur zwey gleiche Linien von A an den Kreis gehen können.

5. §. 147. Zusatz 9. Kreise, die sich schneiden,
6. oder berühren, haben nicht einerley Mittelpunkt. Denn sucht man des einen Kreises Mittelpunkt C, Fig. 43. 44. und zieht CA, und beliebig CD: so wäre, wenn C auch der Mittelpunkt des andern Kreises ist, $CA = CD = CE$, §. 34. gegen (Ar. §. 3.) Berührten sich aber die Kreise von

außen:

außen: Fig. 45. so ist der Satz von selbst klar.

§. 148. Zusatz 10. Zwey Kreise schneiden sich 10.
nur in zwey Punkten. Denn gäbe es drey Durchschnittspunkte, und man sucht des einen Kreises Mittelpunkt, und zieht von da nach solchen Punkten gerade Linien: so sind diese einander gleich, §. 34. folglich wäre erstgedachter Punkt auch der Mittelpunkt des andern Kreises, §. 142. gegen §. 147.

§. 149. Zusatz 11. Eine gerade Linie, welche die beyden Durchschnittspunkte §. 148. verbindet, ist eine gemeinschaftliche Sehne beyder Kreise; daher geht ein Perpendikel auf diese Sehne in ihrer Mitte durch beyder Kreise Mittelpunkte. §. 135.

§. 150. Zusatz 12. Wenn Kreise einander berühren: Fig. 44. 45. so liegen beyder Mittelpunkte mit dem Berührungspunkte A in einer geraden Linie. Denn man suche des einen Mittelpunkt B, §. 136. und ziehe BA.

1) Wäre nun Fig. 44. des andern Mittelpunkt 11.
nicht in BA: so sey er G in einer andern BF, die nicht durch A geht, und man ziehe AG; da denn AG = GH. §. 34. Aber AG + BG > BA, oder BF, d. i. > BG + GF, §. 72. folglich AG > GF, folglich noch mehr AG > GH, welches dem vorigen widerspricht.

2) Wäre Fig. 45. des andern Mittelpunkt 12.
nicht in der verlängerten BA: so sey er D in einer andern BD, die nicht durch A geht, und man ziehe DA; da denn BA = BE, und DA = DF, §. 34. folglich BA + DA = BE + DF. Aber

BA + AD > BD, §. 72. folglich wäre BE + DF > BD, (Ar. §. 1.) gegen (Ar. §. 3.)

§. 151. Zusatz 13. Zwey Kreise berühren sich
13. nur in einem Punkte A. Fig. 44. 45. Denn man suche beyder Mittelpunkte B, C, §. 136. und lege durch sie eine gerade Linie: so trift solche den Berührungspunkt A. §. 150.

1) Wäre nun Fig. 44. noch ein Berührungspunkt D, und man zieht DC, DB: so wäre CD = CA. §. 34. Aber BC + CD > BD oder BA, d. i. > BC + CA, §. 72. folglich CD > CA, welches dem vorigen widerspricht.

2) Wäre Fig. 45. noch ein Berührungspunkt G, und man zieht BG, CG: so wäre BG = BA, und GC = CA, §. 34. folglich BG + GC = BA + CA = BC, da doch BG + GC > BC. §. 72.

§. 152. Zusatz 14. Aufgabe: Soll man durch einen gegebenen Punkt A, Fig. 44. 45. Kreise beschreiben, deren Umringe nur diesen Punkt gemein haben: so ziehe man beliebig eine gerade Linie durch A, nehme darin beliebig zwey Punkte B und C, und beschreibe einen Kreis um B mit BA, und um C mit CA.

Der 2te Lehrsatz. Fig. 46.

14. §. 153. In jedem Kreise sind Sehnen AB, CD in gleichem Abstande vom Mittelpunkte E, wenn sie gleich sind. Und sind gleich, wenn sie in gleichem Abstande vom Mittelpunkte sind.

Beweis.

Beweis. Man mache EF, EH auf die Sehnen senkrecht, §. 58. und ziehe EA, EC: so ist $EA = EC$, folglich auch $EAq = ECq$, §. 107. folglich $AFq + EFq = CHq + EHq$. §. 117.

1) Ist nun $AB = CD$: so ist auch $AF = CH$, (§. 135. und Ar. §. 11.) folglich auch $AFq = CHq$. §. 107. Folglich ist $EFq = EHq$, (Ar. §. 7.) folglich $EF = EH$. §. 107. vergl. §. 73.

2) Ist $EF = EH$, folglich $EFq = EHq$: so ist $AFq = CHq$, folglich auch $AF = CH$, folglich $AB = CD$.

§. 154. **Zusatz 1.** Eine Sehne ist desto größer, 15.
je kleiner ihr Abstand vom Mittelpunkte ist; der Durchmesser aber ist größer, als jede Sehne.

Denn es sey E der Mittelpunkt Fig. 47, folglich AD der Durchmesser, und BC, FH zwey Sehnen, worauf EG, EK senkrecht. Ist nun $EK > EG$: so sey $EL = EG$, und MLN auf EK senkrecht, folglich $MN = BC$. §. 153. Zieht man nun EM, EN, EF, EH: so ist $ME + EN$, d. i. $AD > MN$, §. 72. und $MEN > FEH$, folglich $MN > FH$, §. 78. folglich auch $BC > FH$.

§. 155. **Zusatz 2.** Die größere Sehne hat einen kleinern Abstand vom Mittelpunkte. Denn ist Fig. 47. $BC > FH$: so ist weder $EG = EK$, weil sonst $BC = FH$ wäre; noch $EG > EK$, weil sonst $BC < FH$ wäre. Folglich ist $EG < EK$.

(4,1.) §. 156. Zusatz 3. Aufgabe: Um in einen Kreis Fig. 36. eine gerade Linie GH, die aber nicht größer als der Durchmesser seyn darf, §. 154. einzutragen, ziehe man den Durchmesser BK. Ist nun $GH = BK$, so ist das verlangte geschehen. Ist aber $GH < BK$: so mache man $BL = GH$, und aus B mit BL den Durchschnitt A, und ziehe BA, die $= GH$ ist.

Der 3te Lehrsatz. Fig. 48.

16. §. 157. Ein Perpendikel AE auf dem Halbmesser DA in seinem Endpunkte A, liegt ganz außerhalb des Kreises; aber jede andre gerade Linie durch solchen Punkt A, wie AG, schneidet den Kreis, und macht mit dem Halbmesser AD einen kleinern Winkel, als der, den der Umkreis damit macht; mit dem Perpendikel AE aber einen größern Winkel, als der, den der Umkreis damit macht.

Beweis. 1) In AE nehme man nach Gefallen den Punkt B, und ziehe DB: so ist $DAB > DBA$, folglich $DB > DA$, §. 72. folglich B außerhalb des Kreises.

2) Auf AG falle der Perpendikel DC: so ist $CAD < DCA$, folglich $DC < DA$, §. 72. folglich fällt C innerhalb des Kreises, folglich schneidet AG den Kreis in zwey Punkten A und G. §. 43. 138.

3) Da AG ganz innerhalb des Kreises, §. 137. folglich der Bogen AFG allemal zwischen AG und AE fällt: so ist $GAD < GFAD$, und $GAE > GFAE$.

Anmerk. Von den hier vorkommenden Winkeln ist der eine Schenkel ein Kreisbogen (vergl. §. 10.) und man nennt GFAD den Winkel des Halbkreises, GFAE aber den Berührungswinkel, angulus contactus. Da GA sich gegen AE so weit neigen kann, als man will, so sagt man: der Winkel des Halbkreises sey größer; der Berührungswinkel aber sey kleiner, als jeder geradlinichte spitze Winkel.

§. 158. Zusatz 1. Der Perpendikel AE ist eine Tangente, §. 131. die also den Kreis nur in einem Punkte berührt, und auf dem Halbmesser im Berührungspunkte senkrecht ist.

§. 159. Zusatz 2. Aufgabe: Man soll durch einen gegebenen Punkt A eine Tangente an einen gegebenen Kreis legen. 17.

Ist A im Umkreise: Fig. 48. so ziehe man DA, und den Perpendikel AE.

Ist A außerhalb des Kreises: Fig. 49. so ziehe man AC nach dem Mittelpunkte C, und BD darauf senkrecht; mit CA schneide man BD in D, und ziehe AE; da denn CA = CD, CE = CB, C = C, folglich CEA = CBD = R. §. 47. Man kann auch BF = BD machen, und eine zweyte Tangente AG ziehen.

§. 160. Zusatz 3. Durch jeden Punkt des Umkreises geht nur eine Tangente. §. 70.

§. 161. Zusatz 4. Auf der Tangente HK 18. Fig. 49. ist die Linie CL vom Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte senkrecht. Denn wäre sie es nicht: so sey es eine andere CM. Folglich wäre CML > CLM, folglich CL > CM, §. 72. d. i. CN > CM, gegen (Ax. §. 3.)

§. 162.

19. §. 162. Zusatz 5. Ein Perpendikel LA Fig. 49. auf der Tangente HK im Berührungspunkte L, geht durch des Kreises Mittelpunkt. Denn wäre dieser außerhalb LA, in O, und man zieht OL: so wäre auch diese senkrecht, §. 161. gegen §. 70.

§. 163. Zusatz 6. Kreise, die einander berühren, Fig. 44. haben im Berührungspunkte A eine gemeinschaftliche Tangente KL, §. 162. 150.

§. 164. Anmerk. Bey berührenden Kreisen Fig. 44. geht AD zwischen AE und der gemeinschaftlichen Tangente AK; folglich wird der Berührungswinkel kleiner, wenn der Halbmesser des Kreises größer wird; und der Bogen AE krümmt sich mehr, als der Bogen AD.

Der 4te Lehrsatz. Fig. 50. 51.

20. §. 165. **Der Winkel am Mittelpunkte ist doppelt so groß, als der Winkel am Umkreise, wenn beyde auf einerley Bogen stehen.**

Beweis. 1) Fällt der Mittelpunkt E auf einen Schenkel des Winkels am Umkreise BAD: Fig. 50. so ist BED = EBA + BAE §. 98. = 2 BAD. §. 49.

2) Fällt E innerhalb BAC, Fig. 50. und man zieht AED: so ist (Bew. 1.) BED = 2 BAD, und DEC = 2 DAC, folglich BEC = 2 BAC. (Ar. §. 5.)

3) Fällt E außerhalb BAC, Fig. 51. und man zieht AED: so ist (Bew. 1.) DEC = 2 DAC, und DEB = 2 DAB, folglich BEC = 2 BAC. (Ar. §. 7.)

21. §. 166. Zusatz 1. Alle Winkel in einem Kreisabschnitte, folglich auch alle Winkel am Umkreise auf einerley Bogen, sind gleich. Denn

1) ist

1) ist der Abschnitt größer, als der Halbkreis, Fig. 52. wo C der Mittelpunkt, und man zieht CB, CD: so ist $BCD = 2\,BAD = 2\,BED$, §. 165. folglich $BAD = BED$. (Ar. §. 11.)

2) ist der Abschnitt kleiner, als der Halbkreis Fig. 53. und man zieht AE: so ist $ABE = ADE$, (Bew. 1.) und $AFB = EFD$, §. 61. folglich $BAD = BED$. §. 99.

§. 167. Zusatz 2. Aehnliche Kreisabschnitte 23.
§. 126. über gleichen Grundlinien AB, CD, 24.
Fig. 54. sind congruent. Denn legt man A auf C, AB längst CD: so fällt B auf D, und der Bogen AEB auf den Bogen CFD. Denn wäre dies nicht: so schnitten entweder die Bogen einander, also in drey Punkten, gegen §. 148; oder sie fielen über einander, wie CGD; da denn, wenn man CFG, FD und GD zieht, $CFD > CGD$ ist, §. 67. gegen §. 126.

§. 168. Zusatz 3. Die gegenüberliegenden 22.
Winkel einer vierseitigen Figur im Kreise ABDE Fig. 53. sind zusammen zwey rechten gleich. Denn zieht man AD, BE: so ist $EBD = EAD$, und $BED = BAD$, §. 166. folglich $EBD + BED + BDE = BAE + BDE$ (Ar. §. 5.) $= 2\,R$, §. 98. folglich auch $AED + ABD = 2\,R$. §. 103.

§. 169. Zusatz 4. Sind Fig. 53. die gegenüberliegenden Winkel einer vierseitigen Figur AB DE zusammen zwey rechten gleich: so läßt sich ein Kreis um die Figur beschreiben. Denn durch drey Punkte, A, E, D, geht ein Kreis. §. 140. Gienge

er

er nun nicht auch durch B: so schnitte er BD in einem andern Punkte G. Zieht man daher AG: so ist AGD + AED = 2 R, §. 168. und angenommen ABD + AED = 2 R. Folglich wäre AGD = ABD, gegen §. 67.

31. §. 170. Zusatz 5. Der Winkel im halben Kreise ist ein rechter; im größern Abschnitte aber ein spitzer, und im kleinern ein stumpfer Winkel. Denn es sey Fig. 55. BC der Durchmesser, E der Mittelpunkt, BAC der Winkel im halben Kreise, und man verlängere BA nach F, und ziehe EA: so ist BAE = ABE, und EAC = ACE, §. 49. folglich BAC = ABE + ACE (Ar. §. 5.) = FAC §. 98. = R, §. 13. folglich ABC spitz, §. 68. folglich ADC stumpf. §. 168.

§. 171. Zusatz 6. Aus dem Beweise in §. 170. erhellet, daß der Winkel eines Triangels BAC ein rechter sey, wenn er den beyden übrigen zusammen gleich ist.

§. 172. Zusatz 7. Ein Abschnitt, der einen rechten Winkel enthält, ist ein halber Kreis; kleiner aber, wenn er einen stumpfen, und größer, wenn er einen spitzen Winkel enthält. Denn wäre dies nicht: so wären die Winkel nicht so, wie sie angenommen sind.

§. 173. Zusatz 8. Halbirt man Fig. 55. die Hypotenuse BC eines rechtwinklichten Triangels BAC in E: so geht der Kreis um E mit EB auch durch A. Denn gienge er nicht durch A, wie BGC: so ziehe man EA, und GB, GC, da denn BGC = R = BAC wäre, §. 170. gegen §. 76.

§. 174.

§. 174. Zusatz 9. Geht Fig. 56. vom Be- 32.
rührungspunkte F der Tangente AB eine schneidende Linie FD: so ist jeder der beyden Winkel, die sie mit der Tangente macht, dem Winkel in dem entgegengesetzten Abschnitte gleich. Denn macht man FE senkrecht, die durch den Mittelpunkt geht, §. 162. nimmt beliebig C, und zieht ED, DC, CF: so ist EDF = R, §. 170. folglich EFD + DEF = R §. 101. = EFD + DFB, folglich DEF = DFB, (Ar. §. 7.) folglich DCF = DFA. §. 168.

§. 175. Zusatz 10. Aufgabe: Um in einen (4,2.)
gegebenen Kreis einen Triangel zu beschreiben, der mit einem gegebenen Triangel gleiche Winkel habe, ziehe man Fig. 56. eine Tangente AB, mache AFD einem, und AFG einem andern Winkel des gegebenen Triangels gleich, §. 77. und ziehe DG: so ist FGD = DFB, und FDG = GFA, §. 174. folglich auch GFD dem dritten Winkel des gegebenen Triangels gleich. §. 99.

Der 5te Lehrsatz. Fig. 57.

§. 176. In gleichen Kreisen, folglich auch 26.
in einem Kreise, stehen gleiche Winkel, am Mittelpunkte sowohl als am Umkreise, auf glei- 27.
chen Bogen; und auf gleichen Bogen gleiche Winkel.

Beweis. 1) Ist BGC = EHF, folglich auch BAC = EDF, und man zieht BC, EF: so ist BC = EF, §. 47. folglich sind die Abschnitte über diesen Grundlinien ähnlich, §. 126.

folglich

folglich congruent, §. 167. und weil die Kreise gleich sind, auch die Abschnitte unter den Grundlinien. (Ar. §. 7.)

2) Sind die Bogen BKC, ELF gleich, und es wäre BGC > EHF: so sey BGK = EHF; folglich wäre BK = ELF (Bew. 1.) = BKC, gegen (Ar. §. 3.) Demnach ist BGC = EHF, folglich auch BAC = EDF.

28. §. 177. Zusatz 1. In gleichen Kreisen, Fig. 57. folglich auch in einem Kreise, geben gleiche
29. Sehnen gleiche Bogen; und gleiche Bogen gleiche Sehnen.

Denn nimmt man die Mittelpunkte G, H, und zieht GB, GC, HE, HF, die alle gleich sind; §. 36. und es ist

1) BC = EF: so ist BGC = CHF, §. 53. folglich BKC = ELF. §. 176.

2) BKC = ELF: so ist BGC = EHF, §. 176. folglich BC = EF. §. 47.

30. §. 178. Zusatz 2. Ein Perpendikel EDF Fig. 37. auf die Mitte der Sehne AB, halbirt den Bogen AFB. Denn zieht man AF, BF: so sind diese gleich, §. 47. folglich auch ihre Bogen. §. 177.

§. 179. Zusatz 3. Nimmt man zu beyden Seiten der Tangente HK Fig. 37. gleiche Bogen FA, FB, und zieht die Sehne AB: so ist solche mit der Tangente parallel. Denn es sey C der Mittelpunkt, und man ziehe CF: so ist ACF = FCB, §. 176. CA = CB, CD = CD, folglich sind bey D rechte Winkel, §. 47. aber auch

bey

bey F, §. 161. folglich ist AB mit HK parallel. §. 81.

§. 180. Zusatz 4: Zwey Durchmesser eines Kreises AB, DE, Fig. 58. senkrecht auf einander gezogen, theilen den Kreis sowohl als den Umring in vier gleiche Theile. Ein solcher Theil heißt daher ein Quadrant. Trägt man in einen dieser Quadranten den Halbmesser DF ein, §. 156. und zieht CF: so ist △ DCF gleichseitig, folglich der Bogen BF der dritte Theil des Quadranten, §. 102. also der zwölfte Theil des Umkreises, folglich der Bogen DF der sechste Theil, und dessen Sehne DF dem Halbmesser des Kreises gleich.

Der 6ste Lehrsatz. Fig. 59.

§. 181. Ist der Umfang eines Kreises in lauter gleiche Theile getheilt, und man zieht die Sehnen: so ist dadurch eine reguläre Figur ABCDEF von eben so viel Seiten, als man Theile des Umkreises hat, in den Kreis beschrieben.

Beweis. Da die Bogen gleich sind: so sind auch die Seiten und Winkel der Figur gleich, §. 177. 166. folglich ist die Figur, die so viel Seiten hat, als Bogen da sind, regulär, §. 26. und im Kreise beschrieben. §. 133.

§. 182. Zusatz 1. Aufgabe: Kann man den Umfang eines Kreises in so viel gleiche Theile theilen, als eine reguläre Figur Seiten haben soll: so läßt sich diese in den Kreis beschreiben. §. 181.

(4,15.) Für die sechsseitige Figur, oder das Hexagon, darf man nur den Halbmesser des Kreises sechsmal herumtragen. §. 180.

Zieht man AE, EC, CA: so hat man den gleichseitigen Triangel.

(4,6.) Zieht man Fig. 58. zwey Durchmesser, AB, DE, senkrecht, desgleichen AD, DB, BE, EA: so hat man das Quadrat. §. 177. 170. Auch giebt BF die Seite der zwölfseitigen Figur. §. 180.

§. 183. Zusatz 2. Aufgabe: Ist eine reguläre Figur im Kreise beschrieben: so läßt sich, durch das Halbiren der Bogen, §. 178. eine andere von doppelt so viel Seiten in den Kreis beschreiben.

§. 184. Zusatz 3. Des Kreises Fig. 59. Halbmesser GA, GB, u. s. w. theilen die darin beschriebene reguläre Figur in lauter congruente Triangel GAB u. s. w. machen lauter gleiche Winkel am Mittelpunkte AGB u. s. w. beydes nach der Zahl der Seiten, und halbiren die Winkel der Figur, daß GAB = GAF u. s. w.

Für das Hexagon erhält man lauter gleichseitige Triangel. §. 182.

§. 185. Zusatz 4. Da die Höhe GH Fig. 59. bey allen diesen Triangeln, worein man die Figur theilt, gleich ist: §. 153. so ist solche Figur ABCDEF einem Triangel gleich, dessen Höhe dieser Höhe GH, und dessen Grundlinie dem Umfange der Figur gleich ist. §. 106.

(4,14.) §. 186. Zusatz 5. Aufgabe: Soll man um eine reguläre Figur ABCDEF Fig. 59. einen Kreis beschreiben: so halbire man zwey Win-

kel

kel der Figur B, C, mittelst BG, CG, §. 56. die (weil ein Winkel ABC, folglich beyde Hälften GBC + BCG < 2 R) in G zusammentreffen, §. 83. daß CG = BG, §. 49. Zieht man nun GD: so ist, (weil BC = CD, CG = CG, und GCB = GCD) GD = GB, und GDC = GBC. §. 47. Eben so beweist man, daß auch alle übrige Linien von G nach den Scheiteln der Winkel, diese Winkel halbiren, und der GB gleich sind, daß also ein Kreis um G mit GB durch die Scheitel aller Winkel der Figur geht.

§. 187. Zusatz 6. Halbirt man Fig. 59. zwey nächste Winkel einer regulären Figur B, C, mittelst BG, CG, und zieht vom Durchschnittspunkte G gerade Linien nach den Scheiteln der übrigen Winkel: so sind solche der BG gleich, und halbiren auch die übrigen Winkel.

§. 188. Zusatz 7. Aufgabe: Hat man den Winkel einer regulären Figur: so läßt sich diese Figur über eine gegebene Linie CB Fig. 59. beschreiben, wenn man in B und C die Hälfte solches Winkels legt, §. 77. wodurch sich der Mittelpunkt des Kreises G, der um die Figur geht, ergiebt, §. 186. in dessen Umringe man die gegebene Linie BC herumträgt.

Für das Hexagon beschreibe man über BC einen gleichseitigen Triangel. §. 184.

§. 189. Zusatz 8. Aufgabe: Soll man in (4, 13.) eine reguläre Figur ABCDEF Fig. 60. einen Kreis beschreiben: so halbire man zwey Winkel B, C, mittelst BG, CG, die in G zusammentreffen,

wie §. 186. Von G ziehe man GH senkrecht auf BC, und um G mit GH den verlangten Kreis. Denn zieht man die übrigen Linien GA, GF, GE, GD, GC, die sämmtlich einander gleich sind, und die Winkel der Figur halbiren; §. 187. desgleichen Perpendikel auf die übrigen Seiten GK u. s. w. so ist (weil bey H und K rechte Winkel, die Winkel bey B gleich, und BG gemein) GH = GK. §. 80. Eben so beweist man die Gleichheit der übrigen Perpendikel. Folglich geht ein Kreis um G mit GH durch H, K u. s. w. dessen Tangenten die Seiten der Figur sind, §. 158. und ist daher in die Figur beschrieben. §. 134.

§. 190. Zusatz 9. Ist eine reguläre Figur ABCDEF Fig. 60. um den Kreis beschrieben, §. 134. und man zieht aus dem Mittelpunkte G gerade Linien nach den Winkeln der Figur: so halbiren sie die Winkel, und sind einander gleich. Jede gerade Linie vom Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte, wie GH, ist ein Halbmesser des Kreises, und senkrecht auf die Seite BC, der diese sowohl, als den Winkel am Mittelpunkte BGC halbirt.

§. 191. Zusatz 10. Eben diese Figur wird durch die Linien vom Mittelpunkte nach den Winkeln in so viel gleiche Triangel, wie GCB, von der Höhe des Halbmessers GH, getheilt, als die Figur Seiten hat, und ist daher einem Triangel gleich, dessen Höhe dem Halbmesser des Kreises, und dessen Grundlinie dem Umfange der Figur gleich ist. §. 106.

§. 192.

§. 192. Zusatz 11. Verbindet man die Berührungspunkte obgedachter Figur mit geraden Linien HK, KL u. s. w. so entsteht (weil HGK = KGL u. s. w.) eine reguläre Figur im Kreise von eben so viel Seiten; da denn die Seiten der äussern Figur Tangenten in den Scheitelpunkten der innern Figur sind.

§. 193. Zusatz 12. Aufgabe: läßt sich (4, 12.) Fig. 60. der Umfang eines Kreises in eine verlangte Anzahl gleicher Theile theilen: so entsteht eine reguläre Figur um den Kreis von eben so viel Seiten, wenn man durch die Theilpunkte H, K, L, u. s. w. Tangenten legt. Denn

1) zieht man GH, GK, GL, GA, GB: so sind bey H, K, L rechte Winkel, §. 158. folglich GBq = GHq + BHq = GKq + BKq; §. 117. aber GH = GK, folglich BH = BK, folglich HGB = BGK, und GBH = GBK, §. 53. folglich HGK = 2 BGK, und HBK = 2 GBK. Eben so beweist man, daß KGL = 2 KGA, und KAL = 2 KAG. Nun ist HGK = KGL, (die Winkel des innern Polygons.) Folglich ist BGK = KGA. Nun sind bey K rechte Winkel, und GK gemein. Folglich ist AK = BK, und KAG = GBK, §. 80. folglich AB = 2 BK. Eben so beweist man, daß BC = 2 BH. Nun war nach obigen BK = BH. Folglich ist AB = BC. Da nun auf eben die Art die Gleichheit der übrigen Tangenten erweislich: so ist das Polygon gleichseitig.

2) Nach obigen war GBK = KAG, auch HBK = 2 GBK, und KAL = 2 KAG. Folglich ist HBK = KAL. Da nun auf eben die Art die Gleichheit der übrigen Winkel erweislich: so ist das Polygon auch gleichwinklicht.

Das III. Capitel.

Von der Proportion und Aehnlichkeit.

(Euklids Elem. 6. Buch.)

Erklärungen und Grundlehren.

§. 194. Wird eine Größe A Fig. 61. von einer andern AE genau gemessen: so heißt sie ein **Vielfaches**, multiplum, der andern; diese aber ein **aliquoter Theil**, submultiplum, der ersten, und ist also in ihr nach einer gewissen ganzen Zahl enthalten. (Ar. §. 24.) So ist z. E. A = 4 AE, und AE = $\frac{1}{4}$ A.

Zwey Größen, A, C, Fig. 61. sind in ähnliche aliquote Theile getheilt, wenn die Zahl solcher Theile in beyden gleich ist.

§. 195. Nimmt man von einer Größe DE Fig. 66. die Hälfte oder drüber, von dem Reste wieder die Hälfte oder drüber, und dies immer so fort: so kömmt man irgend einmal auf einen Rest, der kleiner ist, als jede gegebene kleinere Größe DO (quovis dato minus) derselben Art, das ist, von der irgend ein Vielfaches jene übertreffen kann. (Euklids 10. B. 1. Satz.)

Denn

Denn macht man von DO ein Vielfaches DF, das zunächst > DE, und nimmt von DE die Hälfte oder drüber DQ, von DF aber nur das Einfache DO: so ist von den beyderseitigen Resten offenbar QE < OF. Setzt man dieses so fort, bis von DF nur das letzte Einfache geblieben ist: so ist aus eben dem Grunde der letzte Rest in DE kleiner als dieses Einfache, das ist < DO.

§. 196. Größen A, B, Fig. 61. heißen **commensurabel**, wenn sie irgend ein gemeinschaftliches Maaß haben; **incommensurabel** aber, wenn von ihnen gar kein gemeinschaftliches Maaß angegeben werden kann.

Z. E. Man kann A durch fortgesetzte Halbirungen in eine beliebige Menge aliquoter Theile theilen, deren einer AE. Mißt man nun B mit BF = AE, und es bleibt kein Rest: so sind A und B gewiß commensurabel. Bliebe aber ein Rest, der allemal < BF ist: so läßt sich derselbe mit einem aliquoten Theile von BF (der auch zugleich ein aliquoter Theil von A ist) etwa $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ u. s. w. messen. Gesetzt nun, daß bey solchen Messungen immer fort ein Rest bliebe, so klein man auch die Theile von BF angenommen habe, und daß dies immer so statt finde, in was auch für aliquote Theile A getheilt worden: so sind A und B incommensurabel.

§. 197. Ist A ein angenommenes Maaß: so heißt jede Größe derselben Art, wie B, die mit A incommensurabel ist, und sich also weder durch das angenommene Maaß, noch durch irgend einem ali-

quoten Theil desselben genau messen läßt, §. 196. irrational. (Ar. §. 124.)

§. 198. Sind die Größen A, B, Fig. 61. incommensurabel: so giebt es zwar kein gemeinschaftliches Maaß für beyde; §. 196. aber der Rest in B, der allemal kleiner als das gebrauchte Maaß ist, wird immer kleiner und kleiner, und zwischen engere und engere Gränzen eingeschlossen, je kleiner das gebrauchte Maaß ist. (vergl. Ar. §. 128.)

Z. E. Fände man den ersten Rest $> \frac{1}{10}$ BF und $< \frac{2}{10}$ BF; den zweyten $> \frac{2}{100}$ BF und $< \frac{3}{100}$ BF; den dritten $> \frac{3}{1000}$ BF und $< \frac{4}{1000}$ BF u. s. w. und setzte den gesammten Rest 0,1 oder 0,12 oder 0,123 u. s. w.: so würde der Unterschied von der genauen Ausmessung der Größe B zuerst noch kein 10theilchen, hierauf noch kein 100theilchen, dann noch kein 1000theilchen u. s. w. betragen.

§. 199. Da sich hiernach solcher Unterschied kleiner als jede gegebene Größe machen, §. 195. also ohne Ende verringern läßt: so fällt er zuletzt ganz weg, und die immer fortgesetzten Ausmessungen werden zuletzt der genauen Ausmessung völlig gleich. (Ar. §. 129.)

§. 200. Man betrachtet die **Verhältniß** zweyer Größen, A, B, Fig. 61., wenn man forscht, wie vielmal A oder deren aliquoter Theil in B enthalten sey. (Ar. §. 141.) Solche Verhältniß heißt **rational**, wenn sie sich genau angeben läßt; **irrational** aber, wenn dies nicht geschehen kann.

Daher

Daher ist die Verhältniß commensurabler Grössen rational; incommensurabler aber irrational. §. 196.

§. 201. Vier Größen, A, B, C, D, Fig. 61. sind **proportionirt**, nemlich A : B = C : D, wenn die Verhältniß des einen Paares der Verhältniß des andern gleich ist. (Ar. §. 146.)

1) Sind diese Verhältnisse **rational**: so haben die Glieder einer jeden ein gemeinschaftliches Maaß, §. 200. und es läßt sich jedes Paar der Glieder durch Zahlen genau angeben. Finden sich nun für beyde Paare einerley, oder doch proportionirte Zahlen: so sind offenbar ihre Verhältnisse gleich. Z. E. ist A : B = 4 : 3, und C : D = 4 : 3 oder = 8 : 6; so ist A : B = C : D. (Ar. §. 150.)

2) Sind diese Verhältnisse **irrational**: so lassen sie sich durch Zahlen zwar nicht genau, aber doch immer fort genauer und genauer angeben, und zwischen engere und engere Gränzen einschließen. §. 198. Bleiben nun die beyderseitigen Gränzen immer fort einander gleich: so werden zuletzt auch die Verhältnißzahlen beyder Paare gleich seyn. §. 199. Folglich ist auch hier A : B = C : D.

§. 202. Man beweist daher, daß zwey Verhältnisse A : B und C : D, sie mögen **rational** oder **irrational** seyn, einander gleich sind, wenn man homologe Glieder, z. E. A und C, in ähnliche aliquote Theile theilt, und beweist, daß bey jeder **beliebigen Eintheilung** die angenommenen Theile auch in den beyden andern homologen Gliedern B und D auf ähnliche Art enthalten sind; daß nem-

lich ein aliquoter Theil von A entweder genau oder mit einem Reste so vielmal in B enthalten sey, als der ähnliche aliquote Theil von C im ersten Fall genau, im zweyten mit einem Reste in D enthalten ist.

§. 203. Da sich alle Verhältnisse zuletzt auf Zahlen bringen, und daher alle Größen als Zahlen betrachten lassen: so gilt alles, was in der Arithmetik über Verhältnisse und Proportionen gelehrt worden, auch von ausgedehnten Größen.

Anmerk. Nur muß man bey solcher Anwendung nicht aus der Acht lassen, daß in den Verhältnissen und Proportionen der Zahlen sämmtliche Glieder von einerley Art waren. Hier müssen zwar die Glieder jeder Verhältniß auch Dinge von einerley Art seyn; aber in einer Proportion können die beyden letzten Glieder mit den beyden ersten sowohl von einerley als auch verschiedner Art seyn. Ist letzteres: so läßt sich z. E. der Satz von Verwechselung der Glieder (Ar. §. 163.) und der Satz von Summen und Differenzen der Glieder (Ar. §. 169.) nicht unmittelbar anwenden.

§. 204. Zwey Größen D, K, Fig. 61. haben zu einer dritten L gleiche Verhältnisse, wenn sie gleich sind; und sind gleich, wenn sie zu der dritten gleiche Verhältnisse haben. Denn

1) sind die Größen D und K gleich: so ist jedes Maaß von L in beyden nach einerley Zahl mit oder ohne Rest enthalten, folglich D : L = K : L.

2) Sind die Verhältnisse D : L und K : L gleich; es wäre aber nicht D = K: so müßte jedes Maaß von L in beyden auf verschiedene Art enthalten seyn; folglich wären die Verhältnisse nicht gleich, gegen das Angenommene.

§. 205.

§. 205. Geradlinichte Figuren heißen **ähnlich**, wenn die Winkel in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, in der einen Figur so groß, als in der andern, und die Seiten, die gleiche Winkel einschließen (ähnlich liegende Seiten), in **einerley Ordnung** proportionirt sind.

§. 206. Zwey Paar Größen A und D, B und C, Fig. 61. sind in **verkehrter Ordnung** proportionirt, wenn das eine Paar die äußern, das andere die mittlern Glieder der Proportion giebt, das ist, wenn A : B = C : D, oder B : A = D : C.

§. 207. Sind zwey geradlinichte Figuren einer dritten ähnlich: so sind sie selbst ähnlich. (Euklids 21. Satz.)

Denn die Winkel der beyden Figuren sind den Winkeln der dritten gleich, §. 205. folglich einander selbst gleich, (Ar. §. 4.) und die Seiten der beyden Figuren sind den Seiten der dritten proportionirt, §. 205. folglich einander selbst proportionirt. (Ar. §. 150.) Demnach sind die beyden Figuren ähnlich. §. 205.

Der 1ste Lehrsatz. Fig. 62.

§. 208. Triangel ABC, ACD, wie auch Parallelogramme CE, CF, von gleicher Höhe, verhalten sich wie ihre Grundlinien BC, CD. 1.

Beweis. 1) Für die Triangel. Man theile BC beliebig in gleiche Theile, deren einer BG, und ziehe von A nach den Theilpunkten gerade Linien AG ꝛc. so theilen diese den △ ABC in gleiche Theile, deren einer △ ABG, §. 106. und deren

so viele sind, als Theile in BC angenommen worden; daß, wenn BC = 3 BG, auch △ ABC = 3 △ ABG, folglich BC und △ ABC in ähnlich aliquote Theile getheilt sind. §. 194.

Trägt man nun einen Theil von BC auf CD, der darin aufgeht oder nicht, und zieht von A nach den Theilpunkten gerade Linien AH ꝛc. so hat man CH = BG, △ ACH = △ ABG u. s. w. und es sind obige aliquote Theile in CD und △ ACD auf ähnliche Art enthalten, daß, wenn CD so groß als 2 BG genau oder mit einem Reste, auch △ ACD so groß als 2 △ ABG im ersten Falle genau, im zweyten mit einem Reste, ist.

Da nun diese Schlüsse bey jeder Theilung der BC gelten: so ist BC : CD = △ ABC : △ ACD. §. 202.

2) Für die Parallelogramme. Theilt man BD wie zuvor, und zieht durch die Theilpunkte Parallelen mit CA: so finden eben die Schlüsse wie (Bew. 1.) statt, und es ist BC : CD = CE : CF.

Anmerk. Hat man den Satz für eins von beyden bewiesen: so folgt er auch für das andere. (§. 109. und Ar. §. 157.

§. 209. Zusatz. Triangel ABC, DEF Fig. 63. wie auch Parallelogramme CG, FH, von gleichen Grundlinien BC, EF, verhalten sich wie ihre Höhen, AL, DK. Denn macht man LN = BC, und KM = EF, und zieht AN, DM: so ist AL : DK = △ ALN : △ DMK §. 208. = △ ABC : △ DEF §. 106. = CG : FH. §. 102.

Der

Der 2te Lehrsatz. Fig. 64.

§. 210. Wenn in einem Triangel ABC, 2.
die Linie DE mit einer Seite BC parallel ist: so schneidet sie die übrigen Seiten AB, AC proportionirt. Auch ist sie mit der Seite BC, parallel, wenn sie die übrigen Seiten AB, AC, proportionirt schneidet.

Beweis. 1) Es sey DE mit BC parallel. Zieht man nun BE, CD: so ist △ BDE = △ CED, §. 106. folglich △ ADE : △ BDE = △ ADE : △ CED. §. 204. Nun ist AD : DB = △ ADE : △ BDE, und AE : EC = △ ADE : △ CED. §. 208. Folglich ist AD : DB = AE : EC. (Ar. §. 150.)

2) Es sey AD : DB = AE : EC. Nun ist AD : DB = △ ADE : △ BDE, und AE : EC = △ ADE : △ CED. §. 208. Folglich ist △ ADE : △ BDE = △ ADE : △ CED, (Ar. §. 150.) folglich △ BDE = △ CED, §. 204. folglich DE mit BC parallel. §. 108.

§. 211. Zusatz 1. Aus vorstehender Proportion folgen verschiedene andre; AD : AE = DB : EC, (Ar. §. 163.) AD : AB = AE : AC, (Ar. §. 169.) oder AD : AE = AB : AC, (Ar. §. 163.) und, wenn man EF mit AB parallel zieht, AC : CB = AE : FB (ED) u. s. w.

§. 212. Zusatz 2. Eine gerade Linie ED 3.
Fig. 64. die den Winkel eines Triangels AEB halbirt, schneidet die gegenüberliegende Seite AB, den übrigen Seiten AE, EB proportionirt. Denn verlängert man AE, macht EC = EB, und zieht

CB:

CB: so ist ECB = EBC, §. 49. folglich A EB d. i. 2 AED = 2 ECB, §. 98. folglich AED = ECB, (Ar. §. 11.) folglich ED mit BC parallel, §. 81. folglich AE : EC (d. i. EB) = AD : DB.

3. §. 213. Zusatz 3. Eine gerade Linie ED Fig. 64, welche die Seite AB eines Triangels den übrigen Seiten proportionirt schneidet, halbirt den gegenüberliegenden Winkel AEB. Denn macht man wieder EC = EB, und zieht CB: so ist nach der Voraussetzung AE : EC (d. i. EB) = AD : DB, folglich DE mit BC parallel, §. 208. folglich AED = ECB, und DEB = E BC, §. 86. folglich AED = DEB, (weil EC B = EBC. §. 49.)

Der 3te Lehrsatz. Fig. 65.

4. §. 214. Sind in zwey Triangeln ABC, DCE, die Winkel des einen so groß, als die Winkel des andern, (in der Ordnung, wie sie genennt worden): so sind die ähnlich liegen-
5. den Seiten proportionirt. Und sind die Seiten der Triangel proportionirt: so sind die ähnlich liegenden Winkel gleich. Folglich sind in beyden Fällen die Triangel ähnlich.

Beweis. 1) Man bringe zwey ähnlich liegende Seiten BC, CE, in eine gerade Linie: so ist BA mit CD, und AC mit DE parallel. §. 81. Folglich treffen BA, ED verlängert in F zusammen, §. 83. und es ist AF = CD, DF = AC. §. 94. Auch ist BC : CE = BA : AF (d. i. CD) und BC

BC : CE = FD (d. i. AC) : DE, §. 208. folglich auch BA : CD = AC : DE. (Ar. §. 150.)

2) Man mache ECG = B, und CEG = ACB; §. 77. da denn G = A, folglich (Bew. 1.) BA : CG = BC : CE, und nach der Voraussetzung BA : CD = BC : CE, also BA : CG = BA : CD, (Ar. §. 150.) also CG = CD. §. 204. Ferner AC : EG = BC : CE, und nach der Voraussetzung AC : DE = BC : CE, also AC : EG = AC : DE, (Ar. §. 150.) also EG = DE. §. 204. Nun ist auch CE = CE. Folglich sind die ähnlich liegenden Winkel in den Triangeln CDE, CGE gleich, §. 53. folglich auch in den Triangeln CDE, BAC. (Ar. §. 4.)

§. 215. Zusatz 1. In jedem Triangel ABC Fig. 64. macht DE, wenn sie mit BC parallel, zwey ähnliche Triangel ADE, ABC, §. 86. 214. und es ist AE : AC = AD : AB, auch AE : AC = ED : CB u. s. w. (vergl. §. 211.)

§. 216. Zusatz 2. Aufgabe: Um eine gege- 10.
bene Linie AB Fig. 66. so zu schneiden, daß die Schnitte den gegebenen Schnitten einer andern AC proportionirt sind, lege man AB unter einem beliebigen Winkel an AC, ziehe BC, und damit Parallelen durch die Theilpunkte GH, KL, da denn AK : KG = AL : LH, und wenn man KM mit AB parallel zieht, auch KG : GC = KN : NM §. 210. = LH : HB. §. 94.

§. 217. Zusatz 3. Aufgabe: Soll die Linie 9.
DE Fig. 66. in eine verlangte Anzahl gleicher Theile

Theile getheilt werden: so lege man daran unter beliebigem Winkel eine andere DF, trage auf dieselbe so viel gleiche Theile, als verlangt worden, z. E. 5, ziehe FE, und mit solcher durch die Theilpunkte Parallelen: so hat man das Verlangte. §. 216. Auch ist DP : DE = PO : EF. §. 211. 215.

12. §. 218. Zusatz 4. Aufgabe: Um zu drey gegebenen geraden Linien die vierte Proportionallinie zu finden, nehme man nach Gefallen einen Winkel BAC, Fig. 66. trage von den gegebenen Linien auf AB die erste AL, und die zweyte LH. und auf AC die dritte AK, ziehe LK, und mit ihr HG parallel: so ist AL : LH = AK : KG. §. 210.

11. §. 219. Zusatz 5. Aufgabe: Um zu zwey gegebenen Linien AL, LH die dritte Proportionallinie zu finden, mache man AK = LH, und das übrige wie zuvor; da denn AL : LH = LH : KG, oder ∺ AL . LH . KG.

13. §. 220. Zusatz 6. Aufgabe: Um zwischen zwey gegebenen Linien AD, DB Fig. 67. die mittlere Proportionallinie zu finden, bringe man sie in eine gerade Linie AB, halbire solche in C, beschreibe den halben Kreis AEB, und errichte den Perpendikel DE: so ist ∺ AD . DE . DB. Denn zieht man AE, EB: so ist AEB = R, §. 170. folglich AED + DEB = EDB = DBE + DEB, §. 171. folglich AED = DBE. (Ax. §. 7.) Nun sind bey D rechte Winkel.

kel. Folglich ist auch EAD = DEB, §. 98. folglich AD : DE = DE : DB. §. 214.

§. 221. Zusatz 7. Jeden rechtwinklichten Tri- 8.
angel AEB Fig. 67. theilt der Perpendikel ED, vom rechten Winkel auf die Hypotenuse, in zwey unter sich und dem ganzen ähnliche Triangel AED, DEB; §. 220. 207. daher denn solcher Perpendikel die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten der Hypotenuse ∺ AD . DE . DB, und jede Cathete die mittlere Proportionallinie zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte ist ∺ AB . AE . AD und ∺ AB . BE . BD. §. 214.

Der 4te Lehrsatz. Fig. 68.

§. 222. Zwey Triangel ABC, DEF sind 6.
ähnlich, wenn ein Winkel in dem einen so groß als in dem andern ist, und die solche Winkel einschließenden Seiten proportionirt sind.

Beweis. Es sey A = D, und AB : DE = AC : DF. Macht man nun FDG = A, und DFG = C, folglich G = B: so ist AB : DG = AC : DF, §. 214. folglich AB : DE = AB : DG, (Ar. §. 150.) folglich DE = DG. §. 204. Nun ist DF = DF, und es war A = EDF = FDG. Folglich DFE = DFG §. 47. = C. folglich auch E = B, und die Triangel ähnlich. §. 214.

§. 223. Anmerk. Es gereicht zu großer Bequemlichkeit zwey ähnliche Triangel allemal in der Ordnung ihrer gleichen Winkel zu benennen. Z. E. Δ ABC ∽ Δ DEF, wo A = D, B = E, F = C. (Hiemit läßt sich noch

eine andere Bequemlichkeit verbinden, die Seiten solcher Triangel nach den gegenüberliegenden Winkeln mit kleinen Buchstaben zu benennen. So heiße z. E. in $\triangle ABC$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, und im $\triangle DEF$, $EF = d$, $DF = e$, $DE = f$; da denn $a:d = b:e$, $b:e = c:f$, $a:d = c:f$.)

Sonst pflegt man auch überhaupt zwey ähnliche Figuren mit denselben, aber großen und kleinen Buchstaben zu bezeichnen, so daß gleiche Winkel einerley Buchstaben erhalten, wie Fig. 69. 70.

§. 224. Zusatz 1. Aehnliche Figuren ABCDE, abcde, Fig. 69. 70. wenn sie nicht selbst Triangel sind, lassen sich in lauter ähnliche Triangel eintheilen. Denn

20. 1) zieht man Fig. 69. ähnlich liegende Diagonalen BE, be; EC, ec: so ist (weil $A = a$, und $EA : ea = AB : ab$) $\triangle EAB \backsim \triangle eab$, auch $EBA = eba$, und $EB : eb = AB : ab$. §. 222. Nun ist auch $ABC = abc$, folglich $EBC = ebc$; und $AB : ab = BC : bc = EB : eb$. Folglich ist $\triangle EBC \backsim \triangle ebc$, auch $ECB = ecb$ und $EC : ec = BC : bc$. §. 222. Hieraus folgt wie zuvor $\triangle EDC \backsim \triangle edc$.

2) Nimmt man Fig. 70. innerhalb der einen Figur einen beliebigen Punkt F, und in der andern einen ähnlich liegenden f, (den man erhält, wenn man aus dem $\triangle FDC$, die Winkel an der Grundlinie DC an dc trägt,) und zieht von solchen Punkten gerade Linien nach allen Winkeln in beyden Figuren: so erhält man auch lauter ähnliche Triangel. Denn $\triangle FDC \backsim \triangle fdc$, und $CD : cd = DF : df$. §. 214. Nun ist auch CDE

= cde,

= cde, folglich FDE = fde, und CD : cd = DE : de = DF : df. Folglich ist $\triangle$ FED $\backsim$ $\triangle$ fed u. s. w. Hieraus folgt wie zuvor $\triangle$ FAE $\backsim$ $\triangle$ fae, und so auch für die übrigen Triangel; da immer aus der Aehnlichkeit des einen Paars, die Aehnlichkeit des nächstfolgenden geschlossen werden kann.

§. 225. Zusatz 2. Die aus ähnlichen Trian- 18.
geln nach der Ordnung zusammengesetzte Figuren ABCDE, abcde, sind ähnlich.

§. 226. Zusatz 3. Aufgabe: Um auf dc eine der ABCDE ähnliche Figur zu verzeichnen, theile man diese in Triangel, entweder wie Fig. 69. oder wie Fig. 70. mache $\triangle$ cde mit CDE, oder $\triangle$ cdf mit CDF gleichwinklicht; und verfahre mit den übrigen Triangeln auf eben die Art: so ist das Verlangte geschehen. §. 225.

§. 227. Zusatz 4. Legt man Fig. 70. f auf F, und fd längst FD: so fallen auch die übrigen Linien aus f und F auf einander, §. 32. und die Seiten beyder Figuren sind parallel. §. 81.

§. 228. Zusatz 5. Zieht man Fig. 70. durch einen beliebigen Punkt d einer Linie, wie FD, eine Parallele mit DC, und so fort durch c und die übrigen hiedurch bestimmten Punkte, Parallelen mit den übrigen Seiten: so wird die innere Figur der äussern ähnlich. §. 214. 225.

Der 5te Lehrsatz. Fig. 71.

§. 229. Sind zwey Triangel, ABC, ADE, 15.
einander gleich, und ein Winkel A in dem ei-

nen so groß als in dem andern: so sind die solche Winkel einschließenden Seiten in verkehrter Ordnung §. 206. proportionirt. Auch sind zwey Triangel einander gleich, wenn ein Winkel in dem einen so groß als in dem andern ist, und die solche Winkel einschließenden Seiten in verkehrter Ordnung proportionirt sind.

Beweis. 1) Man lege die Triangel in A an einander nach §. 66. und ziehe BD: so ist △ ABC : ABD = ADE : ABD. §. 204. Nun ist △ ABC : ABD = CA : AD, und △ ADE : ABD = EA : AB. §. 208. Folglich ist CA : AD = EA : AB. (Ar. §. 150.)

2) Es sey CA : AD = EA : AB. Nun ist CA : AD = △ ABC : △ ABD, und EA : AB = △ ADE : △ ABD. §. 208. Folglich ist △ ABC : △ ABD = △ ADE : △ ABD. (Ar. §. 150.) Folglich △ ABC = △ ADE. §. 204.

14. §. 230. Anmerk. Auf ähnliche Art wird der Satz auch von Parallelogrammen bewiesen.

Der 6ste Lehrsatz.

§. 231. Sind zwey Figuren einander ähnlich: so verhalten sich ihre Umringe wie ein Paar ähnlich liegende Seiten; ihre Flächen aber wie die Quadrate solcher Seiten.

Beweis. I. Für die Umringe nehme man jede zwey ähnliche Figuren ABCDE, abcde: Fig. 69. so ist AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE

= DE : de = EA : ea, §. 205. folglich AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AB : ab = BC : bc u. s. w. (Ar. §. 169.)

Anmerk. Aus §. 224. hat man auch AB : ab = BE : be u. s. w.

II. Für die Flächen beweise man den Satz

1) von jeden zwey ähnlichen Triangeln ABC, 19.
DEF. Fig. 72.

Zu zwey ähnlich liegenden Seiten AC, DF suche man die dritte Proportionallinie CG, §. 219. trage sie auf CA, und ziehe BG. Hiernach ist AC : DF = DF : CG, und weil die Triangel ähnlich, AC : DF = BC : EF. §. 205. Folglich ist BC : EF = DF : CG, (Ar. §. 150.) folglich △ DEF = △ BGC, §. 229. folglich △ ABC : △ DEF = △ ABC : △ BGC. §. 204. Nun ist △ ABC : △ BGC = AC : CG, §. 208. folglich ist auch △ ABC : △ DEF = AC : CG. (Ar. §. 150.)

Auf AC, DF beschreibe man Quadrate CK, FM, und ziehe die Diagonalen AH, DL; so ist △ ACH ∽ △ DFL, folglich nach obigen △ ACH : △ DFL = AC : CG. Aber ACq : DFq = 2 △ ACH : 2 △ DFL. Folglich ist auch ACq : DFq = AC : CG. Nun war △ ABC : △ DEF = AC : CG. Folglich ist auch △ ABC : △ DEF = ACq : DFq.

2) von jeden andern ähnlichen Figuren ABC 20.
DE, abcde. Fig. 69. Zieht man die Diagonalen: so sind die daher entstehende Triangel ähn-

 lich,

lich, §. 224. und verhalten sich nach obigen wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten. Weil aber alle ähnlich liegende Seiten in den beyden Figuren proportionirt, also in der Verhältniß eines Paars sind: so zeigt ABq : abq die Verhältniß obgedachter Triangel an. Folglich ist △ABE : △abe = △BEC : △bec = △CED : △ced, folglich ABCDE : abcde = △ABE : △abe = ABq : abq. (Ar. §. 169.)

Anmerk. Auch ist ABq : abq = BEq : beq u. s. w. §. 224.

Der 7te Lehrsatz. Fig. 73.

(12,1.) §. 232. **Sind zwey ähnliche Figuren ABCDE, abcde, in Kreisen beschrieben: so verhalten sich ihre Umringe wie die Halbmesser oder Durchmesser der Kreise; ihre Flächen aber wie die Quadrate solcher Halbmesser oder Durchmesser.**

Beweis. Sind F, f die Mittelpunkte der Kreise, also AG, ag, die Durchmesser, und man zieht AC, BG; ac, bg: so ist ABC = abc, und AB : ab = BC : bc, §. 205. folglich BCA = bca, §. 222. und daher auch BGA = bga. §. 166. Nun ist auch ABG = abg. §. 170. Folglich ist AB : ab = AG : ag §. 214. = AF : af. (Ar. §. 157.) Nun sind die Umringe der Figuren wie AB : ab, §. 231. folglich auch wie AG : ag, oder AF : af; und ihre Flächen wie ABq : abq, §. 231. folglich auch wie AGq : agq, oder wie AFq : afq.

Zusatz

Zusatz 1. Alle reguläre Polygone von gleicher Seitenzahl sind ähnlich, und haben folglich auch obige Verhältnisse.

Zusatz 2. Sind Fig. 60. zwey reguläre Polygone, deren eins LKH ꝛc. in das andere ABC ꝛc. um den Kreis beschrieben ist; wo GM, GL die Perpendikel von des Kreises Mittelpunkte auf die Polygonseiten, und △ GML ∽ △ GLF: so verhalten sich die Umringe dieser Polygone wie GM : GL, und ihre Flächen wie GMq : GLq.

Der 8te Lehrsatz. Fig. 74. 75.

§. 233. Gehen Fig. 74. durch einen (3, 35.) Punkt A innerhalb eines Kreises zwey gerade Linien BC, DE bis zur Peripherie: so sind ihre Abschnitte BA, AC; DA, AE, in verkehrter Ordnung proportionirt. Und gehen Fig. 75. von einem Punkte A außerhalb eines Kreises zwey gerade Linien AB, AC, nach dem Kreise, deren jede ihn in zwey Punkten schneidet: so sind diese Linien mit ihren äussern Abschnitten AD, AE, umgekehrt proportionirt.

Beweis. 1) Zieht man BE, CD: so sind die Winkel bey A gleich, §. 61. und C = E, §. 166. folglich BA : AD = AE : AC. §. 214.

2) Zieht man BE, CD: so ist der Winkel A beyden Triangeln gemein, und B = C, §. 166. folglich AB : AC = AE : AD. §. 214.

Zusatz. Ist von den zuerst gedachten Linien die eine BC der Durchmesser Fig. 76. und auf der

andern DE senkrecht: so ist AE=AD, §. 135. folglich die Proportion nun auch AB : AD = AD : AC, wie §. 221.

Der 9te Lehrsatz. Fig. 77.

(3/36.) §. 234. Gehen von einem Punkte A außerhalb eines Kreises zwey gerade Linien nach dem Kreise, deren eine AB ihn in zwey Punkten schneidet, die andere AC ihn berührt: so ist letztere die mittlere Proportionallinie zwischen der ersten AB und ihrem äußern Ab-
(3/37.) schnitte AD. Auch ist von den beyden Linien AB, AC, letztere eine Tangente des Kreises, wenn sie die mittlere Proportionallinie zwischen der ersten und ihrem äußern Abschnitte ist.

Beweis. 1) Zieht man BC, CD: so ist der Winkel A beyden Triangeln gemein, auch ABC = ACD, §. 174. folglich AB : AC = AC : AD. §. 214.

2) Es sey E des Kreises Mittelpunkt, und AF eine Tangente. §. 159. Zieht man nun EF, EA, EC: so ist nach (Bew. 1.) AB : AF = AF : AD, und nach dem angenommenen AB : AC = AC : AD, folglich AC = AF. Nun ist auch CE = FE, und AE = AE. Folglich ist ECA = EFA §. 53. = R. §. 158.

30. §. 235. Zusatz. Aufgabe: Eine gerade Linie AF Fig. 77. so zu schneiden, daß der größere Abschnitt die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen AF, und dem kleinern Abschnitte sey; hal-

bire

dire man AF, errichte auf sie in F den Perpendikel FE, mache FE = $\frac{1}{2}$ AF, beschreibe um E mit EF einen Kreis, ziehe AE (der den Kreis in G schneidet) und aus A mit AG einen Kreisbogen, der AF in H schneidet: so ist ∺ AF . AH . HF.

Denn verlängert man AE (bis sie den Kreis in K trift): so ist (weil AFE = R, folglich AF eine Tangente) AK : AF = AF : AG, §. 234. oder AF : AK = AG : AF, folglich AF : AK — AF = AG : AF — AG, (Ar. §. 169.) d. i. weil AF = GK, und AG = AH) AF : AH = AH : HF. Da nun AE > AF d. i. AG + GE > AF, aber GE = $\frac{1}{2}$ AF: so ist AG d. i. AH > $\frac{1}{2}$ AF.

Der 10te Lehrsatz. Fig. 78.

§. 236. In jedem Kreise verhalten sich die Winkel ACB, ACD, wie die Bogen zwischen ihren Schenkeln AB, AD. 33.

Beweis. Es sey AB in beliebig aliquote Theile getheilt, deren einer AE; diesen trage man auch auf AD, und ziehe von C nach den Theilpunkten gerade Linien. Nun ist AE auch ein aliquoter Theil von AD oder nicht. Im ersten Falle sind alle Winkel, wie ECA, gleich. §. 176. Im zweyten gleichfalls, bis auf den letzten, der kleiner ist. Auch gelten diese Schlüsse, was man auch für ein Maaß AE angenommen habe. Demnach sind, bey jedem Maaße AE die ähnlich aliquoten Theile von AB und ACB in AD und ACD auf ähn-

liche Art enthalten, vergl. §. 208. Folglich ist AB : AD = ACB : ACD. §. 202.

§. 237. Zusatz 1. Ist ACF = R, also AF ein Quadrant: §. 180. so ist jeder Winkel ACB : ACF = AB : AF.

§. 238. Zusatz 2. Da der Beweis §. 236. für jeden Kreis gilt: so ist auch ACB : ACF = ab : af.

§. 239. Zusatz 3. Die Sätze §. 236 bis 238. gelten auch von Peripheriewinkeln. (§. 165. und Ar. §. 157.)

§. 240. Zusatz 4. Reguläre Figuren von gleicher Anzahl Seiten sind einander ähnlich. Denn werden Kreise um dieselben beschrieben: so sind die Winkel beyderseits gleich. §. 236. Nun haben auch die Seiten eben dieselbe Verhältniß. (Ar. §. 145.) Folglich sind die Figuren ähnlich. §. 205.

Das IV. Capitel.

Von der Ausmessung, auch vom Feldmessen.

Wahlsatz.

§. 241. Zur Ausmessung gerader Linien bedient man sich eines Maaßes, das man einen Fuß nennt, macht aus 10 Fuß 1 Ruthe, aus 1 Fuße aber 10 Zoll, aus 1 Zoll 10 Linien u. s. w. und bezeichnet durch ° ′ ″ ‴ die Ruthen, Fuße, Zolle, Linien.

§. 242. Anmerk. 1. Dies heißt die Decimaleintheilung, und hat den Vortheil, daß sich diese Maaße ohne weitere

weitere Rechnung durch die Decimalziffern ausdrücken und in einander verwandeln lassen. So ist z. E. 3° 4′ 7″ 9‴ = 3479‴ = 3,479° u. s. w. Nach der Duodecimaleintheilung aber ist 1° = 12′, 1′ = 12″, 1″ = 12‴ u. s. w. wo die Verwandelung durch Multiplication oder Division mit der Reductionszahl 12 geschehen muß.

§. 243. Anmerk. 2. Bey beyderley Eintheilung ist entweder die Ruthe oder der Fuß zum Grunde gelegt. Im ersten Falle ist 1 Decimalruthe = 1 Duodecimalruthe, oder 10 Decimalfuß = 12 Duodecimalfuß; im zweyten und gewöhnlichern ist 1 Decimalfuß = 1 Duodecimalfuß, oder 10 Decimalzoll = 12 Duodecimalzoll. Hiernach lassen sich die beyden Eintheilungsarten in einander verwandeln.

§. 244. Anmerk. 3. Um Maaße verschiedner Länder mit einander zu vergleichen, muß man ihre Verhältnißzahlen wissen, und die hiezu gehörigen Nachrichten sich bekannt machen. (Siehe Ar. Beylage II.)

§. 245. Anmerk. 4. Um gerade Linien auf dem Papiere zu messen und aufzutragen, bedient man sich des verjüngten Maaßstabes, worauf man eine willkührliche Linie für 1 Ruthe oder 1 Fuß annimmt, und solche in ihre kleinern Theile mittelst sogenannter Transversallinien auf den Grund von §. 217. eintheilt.

§. 246. Anmerk. 5. Wir nehmen an, daß sich alle Größen durch ein gemeinschaftliches Maaß, das man beliebig verkleinern kann, wenigstens ohne merklichen Fehler, messen lassen. §. 198.

Die 1ste Aufgabe. Fig. 79.

§. 247. Den Flächeninhalt eines Rectangels ABCD zu finden.

Auflös. Es sey des Rectangels Grundlinie AB und Höhe AD nach einerley Maaß AE = AF getheilt. §. 246. Von den Zahlen 3, 4, nach welchen solches Maaß in beyden Linien enthal-

ten ist, mache man das Product 12: so giebt dieses den Flächeninhalt des Rectangels.

Beweis. Zieht man durch die Theilpunkte Parallelen mit AB, AD: so wird dadurch das Rectangel in lauter gleiche Quadrate, deren eins EF ist, getheilt, die daher zusammen mit dem Rectangel gleichen Inhalt haben. Nun lassen sich so viel solcher Quadrate, wie EF, an AB und AD setzen, als AE in AB und AD enthalten ist. Ersteres giebt die Zahl der Quadrate in einer Reihe an AB, und letzteres, wie viel solcher Reihen längst AD gesetzt werden können. Folglich bestimmt das Product aus beyden Zahlen die Menge aller Quadrate.

§. 248. Anmerk. Der Kürze wegen sagt man, daß man die Grundlinie AB mit der Höhe AD multiplicire; da man eigentlich solche Linien durch Zahlen von einerley Namen ausdrückt, und diese mit einander multiplicirt. (Was Multiplication zweyer Linien sey, und daß sie keine Fläche geben könne, lehrt §. 218. u. Ar. §. 156.)

§. 249. **Zusatz 1.** Zur Ausmessung der Flächen braucht man ein Quadrat, wie EF, das **Quadratmaaß**, welches eine **Quadrat-Ruthe**, oder **Fuß**, oder **Zoll**, oder **Linie** rc. heißt, je nachdem die Seite des Quadrats, wie AE, 1° oder 1′ oder 1″ oder 1‴ rc. lang ist.

§. 250. **Zusatz 2.** Hiernach sieht man leicht ein, daß nach der Decimal- oder Duodecimaleintheilung 1 **Quadratruthe** 100 oder 144 Quadratfuß, 1 **Quadratfuß** 100 oder 144 Quadratzoll, 1 **Quadratzoll** 100 oder 144 Quadratlinien u. s. w. enthalte.

§. 251.

§. 251. Anmerk. 1. Beym Quadratmaaße hat die Decimaleintheilung gleiche Vortheile mit §. 242. So ist z. E. 35°27'29"45'''=35272945'''=35,272945° u. s. w. Bey der Duodecimaleintheilung ist hier die Reductionszahl 144.

§. 252. Anmerk. 2. Bey Vergleichung des Decimal- und Duodecimalquadratmaaßes gilt §. 243. Nur ist hier, wenn die Ruthen gleich sind, 100 Decimalfuß = 144 Duodecimalfuß; und wenn die Fuße gleich sind, 100 Decimalzoll = 144 Duodecimalzoll.

§. 253. Anmerk. 3. Für die Quadratmaaße verschiedner Länder nimmt man die Quadrate der Verhältnißzahlen in §. 244.

Die 2te Aufgabe.

§. 254. Den Flächeninhalt einer jeden geradlinichten Figur zu finden.

Auflös. 1) Sey das Parallelogramm ABCD Fig. 80. gegeben. Man messe die Grundlinie AB, und Höhe DE, und multiplicire beyde gefundne Zahlen, nachdem man sie auf einerley Benennung gebracht hat.

2) Sey der Triangel ABD Fig. 80. gegeben. Man verfahre wie (Aufl. 1.), und halbire das gefundne Product.

3) Sey die Figur ABCDE Fig. 69. 70. gegeben. Man theile sie in Triangel wie Fig. 69. oder wie Fig. 70. rechne einen jeden besonders nach (Aufl. 2.) aus, und bringe alles in eine Summe.

4) Sey die reguläre Figur ABCDEF Fig. 59. gegeben, worin man nur einen Triangel nach (Aufl. 2.) ausrechnet, und seinen Inhalt mit der Zahl der Seiten multiplicirt. §. 184. 185.

Beweis.

Beweis. Jedes Parallelogramm ABCD Fig. 80. ist einem Rectangel gleich, dessen Grundlinie AB, und dessen Höhe DE ist, §. 106. daher sein Inhalt richtig gefunden ist. §. 247. Der Triangel ABD aber ist die Hälfte des Parallelogramms, §. 109. woraus auch das übrige folgt.

§. 255. Zusatz 1. Den Inhalt eines Quadrats findet man, wenn man seine Seite quadrirt.

§. 256. Zusatz 2. Die Grundlinie oder Höhe eines Parallelogramms findet man, wenn man ihren Inhalt im ersten Falle mit der Höhe, im zweyten mit der Grundlinie dividirt.

§. 257. Zusatz 3. Die Seite eines Quadrats findet man, wenn man aus seinem Inhalte die Quadratwurzel zieht. Diese Operation braucht man auch, die Seite eines rechtwinklichten Triangels aus den beyden übrigen Seiten zu finden, vergl. §. 117. Ist die verlangte Wurzel irrational, (Ar. §. 125.) z. E. die Diagonale des Quadrats: so sind die Linien incommensurabel, §. 196. und ihre Verhältnisse irrational. §. 200. Dergleichen Größen können also zwar nicht in Zahlen, aber doch durch Linien genau angegeben werden. Solches geschieht auch durch §. 220.

§. 258. Zusatz 4. Zieht man aus dem Inhalte einer jeden geradlinichten Figur die Quadratwurzel, oder sucht zwischen den Seiten eines ihr gleichen Rectangels die mittlere Proportionallinie: §. 220. so findet man die Seite eines Quadrats von gleichem Inhalte; wodurch sich also jede geradlinichte Figur in ein Quadrat verwandeln läßt.

Daher

Daher heißt die Findung ihres Inhalts ihre Quadratur, welches besonders beym Kreise und andern krummlinichten Flächen gewöhnlich ist. Den Kreis quadriren heißt also seinen Flächeninhalt finden.

§. 259. Zusatz 5. Die Grundlinie oder Höhe eines Triangels findet man, wenn man seinen verdoppelten Inhalt im ersten Falle mit der Höhe, im zweyten mit der Grundlinie dividirt.

§. 260. Anmerk. Zur Theilung der Figuren dient §. 256. 259. Dieses sowohl, als manche Vortheile beym Ausrechnen des Inhalts bleiben dem mündlichen Unterricht vorbehalten. Nur eines Trapezes BCDL Fig. 80. mit zwey parallelen Seiten BL, CD, ist hier zu gedenken. Hat man dessen Diagonale BD, und Höhe DE gezogen: so ist nach §. 254. der Inhalt der Figur $= \frac{(BL + CD) . DE}{2}$.

Zieht man nun durch die Mitte von BC die FG mit CD, und die HK mit DL parallel: so sind in den Δ FCH, FBK, die Winkel gleich, und CF = FB; folglich ist auch CH = BK, §. 80. folglich BL + CD = LK + DH = 2 FG, folglich $\frac{BL + CD}{2} = FG$.

Demnach ist auch obiger Inhalt der Figur = FG. DE.

Wahlsatz.

§. 261. Das Maaß eines Winkels ACB Fig. 78. sey der Bogen AB oder ab, den man aus seinem Scheitel, mit beliebigem Halbmesser CB oder cb, zwischen seine Schenkel zieht; weil nach §. 237. ein solcher Bogen, durch seine Verhältniß zum Quadranten, die Verhältniß des Winkels ACB zum rechten

ten Winkel ACF anzeigt. Hiezu theilt man den Quadranten in 90 gleiche Theile, die man Grade nennt, und durch (°) bezeichnet; da denn 1 R = 90°, 2 R = 180°, 4 R = 360°. Es ist aber $\frac{1}{60}°$ = 1 Minute = 1′, $\frac{1}{60}'$ = 1 Secunde = 1″, $\frac{1}{60}''$ = 1 Tertie = 1‴ u. s. w. Hiernach sagt man denn: ein Winkel enthalte so und so viel Grade, Minuten, Secunden, Tertien u. s. w.

§. 262. Anmerk. 1) Das Maaß eines Peripheriewinkels BCD Fig. 77. ist die Hälfte des Bogens BFD, worauf er steht. §. 165.

2) Ein Winkel ACE Fig. 81. wird auch so gemessen: Man ziehe aus seinem Scheitel C mit beliebigem Halbmesser CA den Kreisbogen AE, und fälle von A, wo der Bogen den einen Schenkel schneidet, einen Perpendikel AD auf den andern Schenkel; dieser heißt der Sinus des Winkels ACE, oder des Bogens AE, und bestimmt durch seine Verhältniß zum Halbmesser AC die Größe des Winkels und Bogens.

3) Noch auf andere Art läßt sich ein Winkel AEC Fig. 77. messen: Aus seinem Scheitel E ziehe man mit beliebigem Halbmesser EC einen Kreisbogen, und errichte auf EC in C einen Perpendikel, den der verlängerte andere Schenkel in A schneidet; dieser Perpendikel CA heißt die Tangente des Winkels, oder seines Bogens, und bestimmt durch ihre Verhältniß zum Halbmesser EC die Größe des Winkels und Bogens.

4) Um Winkel auf dem Papiere zu messen und aufzutragen, gebraucht man am gemeinsten den sogenannten Transporteur, das ist, einen halben Kreis, der in seine 180 Grade, auch wohl noch in halbe und Viertelgrade eingetheilt ist. Genauer läßt sich dies durch Sinus und Tangenten verrichten. Von diesem folgt das nähere in der Trigonometrie.

Die

Die 3te Aufgabe. Fig. 59.

§. 263. Die Seitenzahl eines regulären Polygons ABCDEF ist gegeben; man soll die Größe des Centriwinkels AGB und des Polygonwinkels ABC finden.

Auflös. Man findet AGB, wenn man 360° mit der Zahl der Seiten dividirt; und ABC, wenn man den gefundnen Centriwinkel von 180° subtrahirt.

Beweis. Beruhet auf §. 184. 98. 64. vergl. §. 261.

Lehrsatz.

§. 264. Der Kreis ist einem Triangel gleich (gleiches Inhalts), dessen Grundlinie der Peripherie, und dessen Höhe dem Halbmesser des Kreises gleich ist.

Beweis. Ist in dem Kreise ein reguläres Polygon beschrieben: Fig. 59. so hat dasselbe einen kleinern Inhalt als der Kreis, auch ist sein Umring kleiner als der Umkreis, und der Abstand der Seiten vom Mittelpunkte kleiner als der Halbmesser. Verdoppelt man die Zahl der Seiten: §. 183. so wird des Polygons Inhalt, Umring und Abstand der Seiten größer als zuvor; aber der vorige Unterschied von der Kreisfläche, vom Umkreise und vom Halbmesser ist nun kleiner geworden. Da man nun die Verdoppelung der Seitenzahl immer wieder aufs neue vornehmen kann: §. 183. so wird obgedachter Unterschied immer fort kleiner und kleiner.

Es wird aber, durch jede solche Verdoppelung der Seitenzahl, der Unterschied des Polygons vom Kreise über die Hälfte vermindert. Denn wenn Fig. 81. AB die Seite irgend eines regulären Polygons im Kreise ist, und AE die Seite des doppeltseitigen: so ist ein aliquoter Theil des Unterschiedes des ersten Polygons das Segment AEB, und ein ähnlicher aliquoter Theil des Unterschiedes des neuen Polygons die Segmente AE und EB. Zieht man nun durch E eine Linie mit AB parallel, und durch A, B, beliebig zwey Parallelen: so ist das daher entstehende Parallelogramm größer als das Segment AEB, folglich seine Hälfte, das ist der △ AEB, größer als die Hälfte des Segments.

Da sich also durch fortgesetzte Verdoppelung der Unterschied des anfänglichen Polygons vom Kreise Fig. 59. kleiner als jede gegebene Größe machen läßt: §. 195. so nähert sich das Polygon dem Kreise ohne Ende; da es denn zuletzt dem Kreise, sein Umfang der Peripherie, und der Abstand der Seiten dem Halbmesser gleich wird, (Ar. §. 129.) folglich der Kreis, so wie das Polygon, durch den Inhalt eines Triangels bestimmt wird, dessen Grundlinie der Peripherie, und dessen Höhe dem Halbmesser des Kreises gleich ist. §. 185.

(12,2.) Zusatz. Aus dem Beweise erhellet zugleich, daß die Umringe der Kreise sich wie die Halbmesser oder Durchmesser, und ihre Flächen wie die Quadrate der Halbmesser oder Durchmesser verhalten. §. 232.

Die

Die 4te Aufgabe. Fig. 81.

§. 265. Die Seite eines regulären Polygons AB und der Halbmesser des darum beschriebenen Kreises CA sind gegeben; man soll die Seite eines Polygons von doppelt so viel Seiten finden.

Auflös. Vom Mittelpunkte des Kreises sey CE auf AB senkrecht; so wird dadurch AB in D, und der Bogen AEB in E halbirt. §. 135. 178. Zieht man daher AE: so ist dies die verlangte Seite. Nun ist $AE = \surd(AD^2 + DE^2)$, §. 257. wo $AD = \frac{1}{2} AB$ gegeben, und $DE = CE - CD$ gefunden werden kann, weil $CE = CA$ gegeben, und $CD = \surd(AC^2 - AD^2)$ §. 257. ist.

Fället man nun wieder aus C einen Perpendikel auf die gefundne Seite AE: so finden obige Schlüsse wieder statt; und es läßt sich solche Operation, so oft man will, wiederholen.

Setzt man hiernach z. E. $CA = 1$, und AB die Seite eines Hexagons $= CA = 1$, folglich $AD = \frac{1}{2}$: so ist $CD = \surd(1 - \frac{1}{4}) = \surd\frac{3}{4} = \frac{\surd 3}{2} = \frac{1{,}7320508\ldots}{2} = 0{,}8660254\ldots$ und $DE = 1 - \frac{\surd 3}{2} = 0{,}1339745\ldots$ folglich einer zwölfseitigen Figur Seite $AE = \surd(AD^2 + DE^2) = 0{,}51763809\ldots$

Auf eben die Art findet man hieraus nach einander die Seite einer 24, 48, 96, 192, 384, 768seitigen Figur u. s. w. Letztere ist

= 0,0081811 .... und die Sehne eines Bogens von $28\frac{1}{8}$ Minuten.

§. 266. Zusatz. Multiplicirt man die gefundene Seite mit der Zahl der Polygonseiten: so hat man den Umring eines solchen Polygons, welches dem Kreise immer näher kommen kann; §. 264. daß man also hier einen Weg sieht, wie sich der Umkreis durch Näherung ausdrücken lasse. So ist z. E. nach obigem der Umring einer 768seitigen Figur = 6,2830 .... folglich der Durchmesser zum Umkreise beynahe wie 2 : 6,2830 ...., oder wie 1 : 3,1415 ....

§. 267. Anmerk. Archimedes hat auf einem beschwerlichern Wege, nämlich durch Vergleichung des um und in den Kreis beschriebenen Polygons (§. 232. Zus. 2.) diese Verhältniß gefunden, wie $1 : 3\frac{1}{7}$ d. i. wie 7 : 22; oder wie $1 : 3\frac{10}{71}$ d. i. wie 71 : 223. Erstere giebt den Umkreis etwas zu groß, letztere aber etwas zu klein an; man hat aber immer die erste unter dem Namen der Archimedischen gebraucht. Nach ihm hat Ludolph von Cöln diese Verhältniß sehr genau gefunden, wie 1 : 3 141 592 653 589 793 238 462 643 383 879 50 also bis auf 32 Decimalstellen, wovon man aber zur Ausübung nur die ersten Ziffern (insgemein nur 3, 14) unter dem Namen der Ludolphischen Zahl gebraucht. Diese Verhältniß, welche durch Kunstgriffe der neuern Mathematik aufs neue berechnet, und bis auf 127 Decimalstellen gefunden worden, dient zur Prüfung aller andern angegebnen Verhältnisse. So ist z. E. die Archimedische 7 : 22 = 1 : 3,142 .... und die Verhältniß des Metius, die auch zuweilen gebraucht wird, 113 : 355 = 1 : 3, 1415929 .... wovon erstere schon bey der dritten, letztere aber erst bey der siebenten Decimalstelle abweicht.

Die

Die 5te Aufgabe.

§. 268. Aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises seinen Umfang und seinen Inhalt zu finden.

Auflös. Multiplicirt man die Ludolphische Zahl (3,14 . . .) mit dem gegebenen Durchmesser: so hat man den Umkreis; und diesen mit dem vierten Theil des Durchmessers: so hat man den Inhalt.

Beweis. 1) Jedes Vielfache des Durchmessers 1 muß ein eben so Vielfaches des Umkreises 3,14 . . . geben; §. 264. Zus. wobey man sich unter 1 ein jedes Maaß, als Ruthen, Fuß, Zoll, Linien u. s. w. gedenken kann.

2) Da hiedurch die Grundlinie des dem Kreise gleichen Triangels §. 264. gefunden worden: so erhält man seinen Inhalt, wenn man diese Grundlinie mit der halben Höhe, d. i. mit dem vierten Theil des Durchmessers multiplicirt. §. 254.

§. 269. Zusatz 1. Um den Durchmesser aus dem Umkreise zu finden, dividire man diesen mit der Ludolphischen Zahl. Z. E. setzt man den Umkreis der Erde 5400 Meilen: so ist ihr Durchmesser $\frac{5400}{3,14} = 1719$ Meilen.

§. 270. Zusatz 2. Setzt man den Halbmesser des Kreises = 1: so zeigt 3,14 . . . . nun den halben Umkreis, und man findet durch die Division mit 180 die Länge eines Bogens von 1 Grade. Diese aber mit 60 dividirt giebt 1 Minute, und diese wieder mit 60 dividirt 1 Secunde. Hiernach ist, für den Halbmesser 1,

1 Grad = 0,017 453 292 5 ....
1 Minute = 0,000 290 888 2 ....
1 Secunde = 0,000 004 848 1 ....
woraus sich jede Anzahl von Graden, Minuten, Secunden zusammensetzen; auch ein solcher Bogen für jeden gegebenen Halbmesser bestimmen läßt.

§. 271. Zusatz 3. Hat man die Länge des gegebenen Bogens AEB Fig. 81. nach §. 270. berechnet: so findet man des Ausschnitts ACBEA Inhalt, wenn man obige Länge mit der Hälfte des Halbmessers multiplicirt.

§. 272. Zusatz 4. Ist Fig. 81. der Ausschnitt ACBEA, und der Triangel ABC berechnet: so subtrahire man letzteres vom ersten, um des Abschnitts ABEA Inhalt zu erhalten.

Foderung.

§. 273. Man soll gerade Linien und Winkel auf dem Felde messen können.

Anmerk. Diese Aufgabe, deren Auflösung nicht nur sich besser zeigen, als sagen läßt, sondern auch noch verschiedne Kenntnisse aus der folgenden Geometrie, und fast aus allen Theilen der angewandten Mathematik, auch selbst aus der Physik voraussetzt, erscheint hier als Foderung, Postulat, um die bisherigen Lehren sogleich auf die practische Geometrie in den nun folgenden Aufgaben anwenden zu können. Indeß sollen hier die vornehmsten Stücke, worauf es bey obgedachter Auflösung ankömmt, kürzlich namhaft gemacht werden; so daß deren Erläuterung und Anwendung dem mündlichen Vortrage vorbehalten bleibt; auch die hiezu nöthigen im Folgenden erst zu erweisenden Lehren unterdeß als Erfahrungen angenommen werden. Nämlich:

1) Gerade

1) Gerade Linien auf dem Felde steckt man durch Stäbe ab, die alle einander decken (in einer Ebene liegen) und vertical sind, welches man durch ein Senkbley erforscht.

2) Gerade Linien auf dem Felde zu messen und aufzutragen, gebraucht man die Meßstange, Meßkette oder Meßschnur, wovon die richtige Eintheilung in Ruthen und Fuße, auch wohl in Zolle bemerkt ist, und mißt möglichst in horizontaler Linie, die auf der Richtung des Senkbleys senkrecht ist, und durch die Setzwage erforscht wird.

3) Winkel vom Felde aufs Papier zu tragen, gebraucht man einen Meßtisch, Mensel, d. i. ein Bret mit Papier bezogen, und auf einem dreyfüßigen Gestelle, dem Stative, beweglich. Ist derselbe horizontal mittelst einer Wasserwage, Niveau, gestellt: so nimmt man darauf durch Hülfe einer Gabel mit einem Senkbley einen Punkt, vertical über dem Scheitel des zu messenden Winkels, legt an selbigen das Diopternlineal in der Richtung seiner Schenkel mittelst des Visirens, und zieht darnach Linien auf dem Papiere, die den verlangten Winkel geben.

4) Winkel auf dem Felde zu messen, gebraucht man den Winkelmesser, Astrolabium, d. i. ein ganzer oder halber gehörig eingetheilter und auf einem Stative beweglicher Kreis von wenigstens 1 Fuß im Durchmesser, um dessen Mittelpunkt das Diopternlineal, oder das mit einem gehörig dazu eingerichteten Fernrohr versehene Lineal, sich umdrehen läßt. Ist das Instrument horizontal gestellt, und sein Mittelpunkt mittelst des Senkbleys vertical über den Scheitel des zu messenden Winkels: so visirt man in der Richtung seiner Schenkel, und bemerkt das Maaß des dadurch abgeschnittenen Bogens.

Kleinere Theile auf diesem Instrumente suchte man vormals durch Transversallinien auf ähnliche Art, wie beym verjüngten Maaßstabe; nachher aber besser durch die Eintheilung in 96; oder auch durch den Nonius, Vernier.

5) Zu gleichem Endzweck mit dem Winkelmesser dient auch, in einigen besondern Fällen, die Boußole, d. i. eine in einem an dem Diopternlineal befestigten Gehäuse ein-

geschlossene Magnetnadel, die mit ihrer Spitze auf einen gehörig eingetheilten Rand zeigt. Dieses Instrument stellt man gehörig über den Scheitel des Winkels, visirt längst den beyden Schenkeln, bemerkt die Grade, bey welchen die Spitze der zur Ruhe gekommenen Magnetnadel (deren Richtung während der Operation als unveränderlich angenommen wird) bey jedem Schenkel einspielt, und nimmt die Differenz davon als die Größe des gesuchten Winkels.

6) Zu Höhenmessungen bringe man mittelst des Senkbleys die Ebene des Winkelmessers in eine verticale, und den Durchmesser desselben in eine horizontale Lage.

7) Ein genaues Astrolabium bringt alsdenn erst alle seine Vortheile, wenn man die damit gemessenen Winkel nicht erst (mittelst des Transporteurs) aufs Papier tragen darf, sondern sogleich trigonometrische Berechnungen darnach anstellt. Daher ist hier noch das vorzüglichste Instrument der Meßtisch.

8) Zu geringern Höhen, wo auf Kleinigkeiten vieles ankömmt, ist auch das beste Astrolabium untauglich; und müssen solche durch Hülfe eines eignen Instruments, der Nivellirwage oder Wasserwage gemessen werden, welches man nivelliren oder wasserwägen nennt. Dieses Instrument verstattet mancherley Einrichtungen, wenn es nur eine richtige Horizontallinie giebt, nach welcher man durch die Diopteren, oder durch ein mit einem feinen Fadenkreuz versehenes Fernrohr nach einer ausgesteckten Latte, woran ein bezeichnetes Bret beweglich ist, visiren kann, um die Erhöhung eines Punkts der Erde über einen andern auf das genaueste zu bestimmen.

Die 6ste Aufgabe.

§. 274. Eine Weite AB zu messen, wenn man nur zu ihren beyden Endpunkten gelangen kann.

Auflös. 1) mit bloßen Stäben Fig. 82. Man nehme einen Standpunkt C, messe AC, BC, trage

trage sie auf die rückwärts verlängerten Linien in D, E, und messe DE = AB. §. 47. Auch kann man einen beliebigen aliquoten Theil von AC, BC entweder auf die Verlängerungen in F, G, oder auf die Linien selbst in H, K, tragen, da denn FG oder HK ein ähnlich aliquoter Theil von AB seyn wird. §. 222.

2) Mit dem **Meßtische** Fig. 83. Man nehme auf dem Meßtische einen Punkt K, vertical über den erwählten Standpunkt C auf der Erde, visire durch das Diopterlineal nach den Stäben in A und B, ziehe die Linien KD, KE, und mache sie nach dem verjüngten Maaßstabe so groß, als CA, CB nach dem wirklichen Maaße sind: so giebt DE nach dem verjüngten Maaße das wirkliche Maaß von AB. §. 222.

3) Mit dem **Winkelmesser** oder der **Boußole** Fig. 83. Man messe den Winkel ACB, und die einschließenden Seiten AC, CB: so kann man darnach auf dem Papiere den △KDE ∽ △CAB §. 222. verzeichnen.

Die 7te Aufgabe.

§. 275. **Eine Weite AB zu messen, wenn man nur zu einem ihrer Endpunkte B gelangen kann.**

Auflös. 1) mit bloßen Stäben Fig. 82. Man nehme L in gerader Linie mit BA, messe BC, LC, und verlängere sie, mache CE = BC, CM = LC, und setze D in gerader Linie mit EM und CA; da denn CME = CLB, MCD =

 ACL,

ACL, CM = CL, folglich MD = AL, §. 80. und ED = AB, auch CD = AC.

2) Mit dem Meßtische Fig. 83. Man nehme auf dem Meßtische einen Punkt K vertical über den erwählten Standpunkt C auf der Erde, visire durch das Diopternlineal nach den Stäben in A und B, ziehe die Linien KD, KE, und mache nach dem verjüngten Maaße KE = CB. Nun trage man den Meßtisch in B, daß E vertical über B und EK in der Richtung BC, visire aus E nach dem Stabe in A, und ziehe die Linie ED, welche KD in D schneidet: so giebt ED nach dem verjüngten Maaße das wirkliche Maaß von BA; weil △ KDE ∽ △ CAB, §. 214, folglich KE : CB = ED : BA.

3) Mit dem Winkelmesser oder der Boußole Fig. 83. Man messe die Winkel ACB, CBA, und die Seite CB: so kann man hiernach auf dem Papiere den △ KDE ∽ △ CAB verzeichnen.

Die 8te Aufgabe.

§. 276. **Eine Weite AB zu messen, wenn man zu keinem ihrer Punkte gelangen kann.**

Aufl. 1) Mit bloßen Stäben Fig. 82. Man messe CA, CB nach §. 275. Aufl. 1. trage davon einen beliebigen aliquoten Theil in H, K: so ist HK ein ähnlich aliquoter Theil von AB.

2) Mit dem Meßtische Fig. 84. Man nehme eine Standlinie CD, die man genau messen kann. Auf dem Meßtische nehme man den Punkt K vertical über C, visire nach A, B, D, ziehe die Linien

KE,

KE, KF, KG, und mache nach dem verjüngten Maaße KG = CD. Nun trage man den Meßtisch in D, daß G vertical über D, und GK in der Richtung DC sey, visire nach B und A, und ziehe die Linien GF, GE, welche die bereits gezogenen Linien KF, KE in F und E schneiden: so giebt EF nach dem verjüngten Maaße das wirkliche Maaß von AB. Denn △ KEG ∽ △ CAD, und △ EGF ∽ △ ADB, folglich KGFE ∽ CDBA, §. 225. folglich KD : CD = EF : AB.

3) Mit dem Winkelmesser oder der Boußole Fig. 84. Man messe CD und die Winkel ACD, ACB, CDB, ADB: so kann man hiernach auf dem Papiere EKGF ∽ ACDB verzeichnen.

Die 9te Aufgabe.

§. 277. Jede Figur aufzunehmen, oder in Grund zu legen, d. i. eine ähnliche Figur auf dem Papiere zu verzeichnen.

Auflös. Man messe die Triangel, welche die Figur ausmachen, und verzeichne auf dem Papiere ähnliche Triangel in eben der Ordnung. Nämlich

1) kann man in die Figur kommen: so messe man Fig. 69. alle Seiten und Diagonalen der Figur, oder nehme Fig. 70. einen beliebigen Punkt F in der Figur, messe die Winkel um F, und die Linien von F nach allen Winkelpunkten der Figur; da sich denn die ähnlichen Figuren abcde Fig. 69. und abcdef Fig. 70. verzeichnen lassen. Der Meßtisch in F Fig. 70. giebt die Winkel um F unmittelbar.

Anmerk.

Anmerk. Kann man in der Figur eine Standlinie messen, aus deren Endpunkten alle Winkel der Figur gesehen werden können: so lassen sich nach §. 276. die Längen und Lagen ihrer Seiten bestimmen. Auf diese Art lassen sich ganze Gegenden vermessen.

2) Kann man nicht in die Figur kommen: Fig. 69. so messe man die Seiten und Winkel derselben.

Die 10te Aufgabe. Fig. 85.

§. 278. Eine Höhe AB zu messen.

Auflös. 1) Man nehme einen Standpunkt C, messe BC = EF, und den Winkel AEF, und verzeichne hiernach einen Triangel ∽ △ AFE.

2) Man messe eine horizontale Standlinie CD = EG, und die Winkel AGE, AEF, verzeichne hiernach einen Triangel ∽ △ AEG, trage an E den Winkel AEF, und fälle von A auf EF den Perpendikel AF.

Die 11te Aufgabe. Fig. 86.

§. 279. Den Höhenunterschied zweyer Punkte A und B auf der Oberfläche der Erde zu finden.

Auflös. 1) Man stecke Latten vertical in A und B ein, setze das Nivellirinstrument CD in die Mitte C zwischen A und B, visire durch dasselbe nach E und nach F, und messe AE, BF: so ist der Unterschied dieser beyden Höhen AG der gesuchte Höhenunterschied der beyden Oerter.

2) Ist

2) Ist der Abstand der beyden gegebenen Punkte so groß, daß man in ihrer Mitte die eingesteckten Latten nicht erblicken kann: so nehme man zwischen ihnen so viel Stationen, als nöthig ist, verfahre mit jeder nach der gegebenen Vorschrift, und vergleiche die gefundenen Höhenunterschiede mit einander, woraus sich denn der gesuchte Höhenunterschied leicht ergiebt.

Der erste Cursus der Stereometrie, oder des zweyten Theils der Geometrie.

Das I. Capitel.

Von der Lage der Ebenen.

(Euklids Elem. 11. Buch.)

Erklärungen.

3. §. 1. Eine gerade Linie AB Fig. 87. ist auf einer Ebene CD, in dem von ihr getroffenen Punkte B, senkrecht, wenn sie auf jeder geraden Linie BE, die in gedachter Ebene durch solchen Punkt geht, senkrecht ist.

4. §. 2. Eine Ebene AB Fig. 88. ist auf einer andern Ebene CD senkrecht, wenn jede in der einen Ebene, senkrecht auf den Durchschnitt BC gezogene Linie EF auf der andern Ebene senkrecht ist.

§. 3.

§. 3. Die **Neigung** einer geraden Linie AF 5.
Fig. 87. gegen eine Ebene CD (oder ihr Winkel mit der Ebene) ist der Winkel AFB, den sie mit der geraden Linie FB macht, die von dem Orte F, wo sie die Ebene trift, nach dem Orte B gezogen wird, wo der von irgend einem ihrer Punkte A auf die Ebene gefällte Perpendikel AB die Ebene trift.

§. 4. Die **Neigung** zweyer Ebenen AB, BD 6.
Fig. 90. gegen einander ist der Winkel FEG, den die in beyden Ebenen, senkrecht auf den Durchschnitt BC aus einerley Punkt E gezogenen Linien EF, EG machen.

§. 5. Neigungen der Ebenen ABD, HKM 7.
Fig. 90. heißen **ähnlich**, wenn gedachte Neigungswinkel FEG, PNQ gleich sind.

§. 6. Eine gerade Linie ist mit einer Ebene, so 8.
wie eine Ebene mit einer andern, **parallel**, wenn beyde beliebig verlängert nirgends zusammentreffen.

§. 7. Ein **körperlicher Winkel**, oder eine 11.
Ecke, angulus solidus, Fig. 89. ist zwischen mehr als zwey Linien, wovon aber nie mehr als zwey in einerley Ebene liegen, an dem Punkte A, wo sie alle zusammentreffen, enthalten. Oder: ein **körperlicher Winkel** wird von mehr als zwey ebenen Winkeln, BAC, CAD, DAB, die alle in verschiedenen Ebenen liegen, an ihrem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte A eingeschlossen.

Anmerk. Man kann sich die Ecke A Fig. 89. entweder so vorstellen, daß die Linie AD gegen die Ebene BAC geneigt sey; oder, daß der Punkt A über der Ebene des Papiers sey, und von ihm die Linien AB, AC, AD nach der Ebene des Papiers herabgehen.

§. 8.

§. 8. **Congruente Ecken** sind zwischen gleich vielen, in der Ordnung gleichen, ebenen Winkeln enthalten.

Grundlehren.

1. §. 9. Eine gerade Linie ist ganz in einer Ebene CD, Fig. 91. wenn zwey Punkte von ihr A, B, in der Ebene sind. Oder: durch jede gerade Linie läßt sich eine Ebene legen.

Denn AB ist in der Ebene (Planim. §. 7.). Wäre nun ein andres Stück der geraden Linie, BE, über der Ebene, und man verlängert AB in der Ebene nach F (Pl. §. 29.): so hätten zwey gerade Linien ABE, ABF, das Stück AB gemein, gegen (Pl. §. 41.).

2. §. 10. Jeder Triangel ABC, Fig. 92. folglich auch jede drey Punkte, A, B, C, und jede zwey sich schneidende gerade Linien CD, BE, sind in einerley Ebene FG. Oder: durch jeden Triangel, durch jede drey Punkte, und durch jede zwey sich schneidende gerade Linien läßt sich eine Ebene legen.

Denn wäre von dem Triangel ein Stück AHK in, das andre über der Ebene: so wären die Linien AB, AC nicht ganz in der Ebene gegen §. 9. Folglich ist der ganze Triangel ABC in der Ebene, und die drey Punkte A, B, C; folglich auch CD, BE. §. 9.

7. §. 11. Jede gerade Linie AB Fig. 93. durch zwey Parallellinien CD, EF, ist mit ihnen in einerley Ebene GH.

Denn

Denn CD, EF sind in einer Ebene, (Pl. §. 11.) folglich A und B, folglich AB. §. 9.

§. 12. Zwey Ebenen, AB, BD, Fig. 90. schneiden einander in einer geraden Linie BC. Denn wäre der Durchschnitt BC keine gerade Linie: so ließe sich in jeder der beyden Ebenen von B nach C eine andere gerade Linie ziehen; und beyde hätten zwey Punkte, B, C, gemein, gegen (Pl. §. 41.) und schlössen einen Raum ein, gegen (Pl. §. 42.) 3.

§. 13. Die Durchschnitte AB, GH, Fig. 94. jeder Ebene BH, mit zwey parallelen Ebenen AC, DF, sind parallel. 16.

Denn träfen sie in irgend einem Punkte zusammen: so wäre derselbe sowohl in AC, als in DF. §. 9. Daher träfen die beyden Ebenen zusammen, und könnten also nicht parallel seyn. §. 6.

Der 1ste Lehrsatz. Fig. 95.

§. 14. **Eine gerade Linie AB ist auf einer Ebene MN in dem von ihr getroffenen Punkte B senkrecht, wenn sie auf zwey Linien CD, EF, die in solcher Ebene durch gedachten Punkt gezogen werden, senkrecht ist.** 4.

Beweis. Man ziehe in der Ebene durch den Punkt B jede dritte Linie GH: so läßt sich erweisen, daß AB auch auf dieser, folglich auf der Ebene MN senkrecht sey. §. 1.

Denn macht man BC = BD, BE = BF, und zieht CE, DF, welche die dritte Linie in G und H schneiden: so ist in den △ EBC, FBD, CE = DF, und ECB = BDF, (Pl. §. 47.

 weil

weil bey B Scheitelwinkel, und die einschließenden Seiten gleich gemacht sind.) Folglich ist auch in den △ CGB, DHB, BG = BH, und CG = DH, (Pl. §. 50. weil bey B Scheitelwinkel, und nach Obigem GCB = BDH, und BC = BD.)

Zieht man nun von einem beliebigen Punkte A in AB gerade Linien nach den sechs Punkten in der Ebene MN herab: so ist in den △ ABC, ABD, desgleichen in den △ ABE, ABF, AC = AD, und AE = AF, (Pl. §. 47. weil die senkrechte AB mit CD und mit EF gleiche Nebenwinkel macht, und CB der BD, EB der BF gleich gemacht sind.) Folglich sind in den △ ACE, ADF die eben genannten Winkel gleich. (Pl. §. 53. weil nach dem Bewiesenen CE = DF, AC = AD, AE = AF.) Folglich in den △ ACG, ADH, ist AG = AH. (Pl. §. 47. weil nach dem Bewiesenen ACG = ADH, AC = AD, CG = DH.) Folglich sind in den △ ABG, ABH die eben genannten Winkel gleich. (Pl. §. 53. weil erwiesen AG = AH, BG = BH, und AB gemein.) Folglich ist AB senkrecht auf GH, (Pl. §. 13.) das ist, auf jeder Linie durch B, folglich auf der Ebene MN. §. 1.

5. §. 15. Zusatz. Drey aus einem Punkte B Fig. 95. ausgehende gerade Linien BG, BD, BF, auf denen eine vierte AB in solchem Punkte senkrecht ist, müssen in einer Ebene seyn.

Denn wäre eine davon BF über der Ebene, worin die beyden andern sind: §. 10. so lege man durch ABF eine Ebene, welche die erste in BH

schneide.

schneide. §. 12. Demnach wäre ABH = R §. 14. = ABF, gegen (Ar. §. 3.)

Der 2te Lehrsatz. Fig. 96.

§. 16. Sind zwey gerade Linien AB, CD, auf einer Ebene EF senkrecht: so sind sie parallel. Und ist von zwey Parallelen AB, CD, die eine AB senkrecht auf der Ebene EF: so ist es auch die andere CD. 6. 8.

Beweis. 1) In der Ebene EF ziehe man BD, und auf solche DG senkrecht, mache DG = AB, und ziehe BG, AG, AD: so sind ABG, ABD, CDB, CDG rechte Winkel. §. 1. Folglich in den △ ABD, BDG ist AD = BG. (Pl. §. 47. weil ABD = BDG, AB = DG, und BD gemein.) Folglich sind in den △ ABG, ADG die eben genannten Winkel gleich. (Pl. §. 53. weil AB = DG, BG = AD, und AG gemein.) Folglich ist ADG = R (weil ABG = R) d. i. GD auf DA senkrecht. Nun ist GD auch auf DB, DC senkrecht, (weil CDB, CDG rechte Winkel.) Folglich sind DA, DB, DC in einer Ebene, §. 15. in welcher auch AB. §. 10. Nun sind in dieser Ebene, ABD, CDB, rechte Winkel, (weil AB, CD auf der Ebene senkrecht.) Folglich sind AB, CD parallel. (Pl. §. 81.)

2) Nach obiger Construction sind die Parallelen AB, CD mit DB, DA in einer Ebene, §. 11. und ABD + CDB = 2 R. (Pl. §. 86.) Nun ist ABD = R. §. 1. Folglich ist auch CDB = R, d. i. CD auf DB senkrecht. Nun ist nach vo-

rigem Beweise GD auf DB, DA senkrecht, und daher auch auf DC, §. 14. oder CD auf DG. Folglich ist CD auf der Ebene EF senkrecht. §. 14.

9. §. 17. Zusatz 1. Sind zwey Linien AB, CD Fig. 97. mit einer dritten EF in einer andern Ebene parallel: so sind sie selbst parallel.

Denn nimmt man in EF einen beliebigen Punkt G, worin man auf EF in der Ebene ABFE die GH, und in der Ebene CDFE die GK senkrecht errichtet: so ist EF auf der Ebene HGK senkrecht, §. 14. folglich auch ihre Parallelen AB, CD, (§. 16. Bew. 2.) folglich diese parallel. (§. 16. Bew. 1.)

10. §. 18. Zusatz 2. Zwey Winkel in verschiedenen Ebenen, BFD, HGK, Fig. 97. sind gleich, wenn die Schenkel, die nach einerley Seite der Scheitellinie FG liegen, parallel sind, nämlich FB mit GH, FD mit GK.

Denn macht man FB = GH, FD = GK, und zieht FG, BH, DK, BD, HK: so sind BH und DK mit FG, folglich mit einander parallel und gleich. (§. 17. und Pl. §. 91.) Folglich ist auch DB = KH, (Pl. §. 91.) folglich BFD = HGK. (Pl. §. 53.)

Aufgabe. Fig. 98.

§. 19. Einen Perpendikel auf eine gegebene
11. Ebene MN, durch einen gegebenen Punkt A
12. über, oder G in der Ebene, zu ziehen.

Auflös. 1) Ueber der Ebene sey ein Punkt A gegeben. Man ziehe in der Ebene eine beliebige

Linie

Linie B C, und auf diese in der Ebene durch ABC von A die AD senkrecht. (Pl. §. 58.) Ist nun AD auf der Ebene senkrecht: so ist das Verlangte geschehen. Ist sie es aber nicht: so ziehe man auf BC die DE, und auf DE die AF senkrecht. (Pl. §. 58.) Letztere ist der verlangte Perpendikel.

2) In der Ebne sey ein Punkt G gegeben. Ueber der Ebene nehme man willkührlich einen Punkt, und fälle von ihm einen Perpendikel auf die Ebene, nach dem ersten Falle. Trift dieser den gegebenen Punkt G: so ist das Verlangte geschehen. Trift er ihn aber nicht, wie AF: so ziehe man mit ihm in der Ebene durch AFG die GH parallel. Leztre ist der verlangte Perpendikel.

Beweis. 1) Durch F sey KL mit BC parallel. Da nach dem Angenommenen BC auf DA und DE, folglich auf der Ebene ADF senkrecht ist: §. 14. so ist es auch ihre Parallele KL, §. 16. folglich AFL = R. §. 1. Nun war auch AFD = R. Folglich ist AF auf der Ebene MN senkrecht. §. 14.

2) Da AF senkrecht auf MN: so ist es auch ihre Parallele GH. §. 16.

§. 20. Zusatz 1. Durch A oder G Fig. 98. 13. geht nur ein Perpendikel auf die Ebene MN. Denn giengen durch A zwey Perpendikel, AF, AD, und man zieht FD: so wären im △ ADF zwey rechte Winkel, §. 1. gegen (Pl. §. 67.) Und giengen durch G zwey Perpendikel, GH, GQ: so schneidet eine Ebene durch HGQ die MN in GR, und es wäre QGR = R = HGR, §. 1. gegen (Ar. §. 3.)

§. 21. Zusatz 2. Der Perpendikel AF Fig. 98. ist die kürzeste Linie von A auf die Ebene MN, (Pl. §. 73.) und heißt daher der **Abstand** oder die **Entfernung** des Punktes A von der Ebene MN.

38. §. 22. Zusatz 3. Ist eine Ebene ADF Fig. 98. auf einer andern MN senkrecht, und man fället in der einen von einem beliebigen Punkte A auf die andere einen Perpendikel: so trift derselbe beyder Ebenen Durchschnitt DE. Denn träfe er ihn nicht: so sey in ADF die AF auf DE, folglich auch auf MN senkrecht, §. 2. gegen §. 20.

§. 23. Zusatz 4. Ist AF Fig. 98. auf der Ebene MN, und AD auf einer Linie BC in der Ebene senkrecht: so ist auch DF auf BC senkrecht. Denn wäre es diese nicht, sondern eine andre: so wäre ein Perpendikel auf sie von A auf der Ebene senkrecht, §. 19. zugleich mit AF, gegen §. 20.

§. 24. Zusatz 5. Ist AF Fig. 98. auf der Ebene, und FD auf einer Linie BC in der Ebene senkrecht: so ist auch AD auf BC senkrecht. Denn träfe ein Perpendikel von A auf BC einen von D verschiednen Punkt: so ziehe man durch diesen Punkt einen Perpendikel auf BC in der Ebene, (der folglich mit DF parallel) da denn ein Perpendikel auf denselben von A auf der Ebene senkrecht, §. 19. zugleich mit AF. gegen §. 20.

34. §. 25. Zusatz 6. Auf zwey Ebenen, die einander schneiden, kann nicht einerley gerade Linie zugleich senkrecht seyn.

Denn

Denn es schneide irgend eine Ebene die MN Fig. 98. in der Linie BC, und es falle von irgend einem Punkte A in der ersten Ebene außerhalb BC ein Perpendikel AF auf die zweyte Ebene MN: so ist, wenn man beliebig AD, FD zieht, allemal AFD = R, §. 1. folglich FAD spitz, folglich FA nicht auf der ersten Ebene senkrecht. §. 1.

§. 26. Zusatz 7. Zwey Ebenen, auf die einer- 14.
ley gerade Linie zugleich senkrecht ist, sind parallel, weil es unmöglich ist, daß sie einander schneiden. §. 25.

§. 27. Zusatz 8. Sind die Schenkel eines 15.
Winkels ABC Fig. 94. den Schenkeln eines Winkels in einer andern Ebene DEF parallel: so sind die Ebenen durch diese Winkel parallel.

Denn von B falle der Perpendikel BG auf die Ebene DF, und man ziehe durch G die GH, GK mit DE, EF parallel: so sind solche auch mit AB, BC parallel, §. 17. und (weil BG auf GH, GK senkrecht, §. 1.) auch GB auf AB, BC senkrecht, (Pl. §. 81.) folglich GB auf der Ebene AC senkrecht, §. 14. folglich AC mit DF parallel. §. 26.

§. 28. Zusatz 9. Aufgabe: Soll durch B Fig. 94. eine Ebene mit der Ebene DF parallel gelegt werden: so falle von B die BG auf die Ebene DF senkrecht, in welcher man beliebig GH, GK, und mit diesen BA, BC parallel zieht; da denn die Ebene AC mit DF parallel ist. §. 27.

§. 29. Zusatz 10. Sind zwey Ebenen AC, DF Fig. 94. parallel: so ist eine Linie BG, die auf der einen DF senkrecht ist, auch auf der andern AC senkrecht.

Denn legt man durch B, G zwey Ebenen AG, CG; so sind die Durchschnitte AB mit GH, und BC mit GK parallel, §. 13. folglich GB auch auf BA, BC senkrecht, (Pl. §. 86.) folglich auch auf der Ebene BC. §. 14.

Der 3te Lehrsatz. Fig. 99.

18. §. 30. Ist eine gerade Linie AB auf einer Ebene MN senkrecht: so ist es auch jede durch
19. solche Linie gelegte Ebene AC. Und sind mehrere einander schneidende Ebenen AC, AD auf einer Ebene MN senkrecht: so ist es auch ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt AB.

Beweis. 1) Es sey die Linie AB senkrecht auf MN, und durch sie die Ebene AC gelegt, welche die MN in BC schneide; daher ABC = R. §. 1. Nun sey in der Ebene AC auf den Durchschnitt BC beliebig EF senkrecht, das ist, auch FEB = R. Folglich ist EF der AB parallel, (Pl. §. 81.) folglich auf MN senkrecht, §. 16, folglich auch die Ebene AC. §. 2.

2) Wären die Ebenen AC, AD auf der Ebene MN, die sie in BC, BD schneiden, senkrecht, aber nicht ihre Durchschnittslinie AB auf BC, BD: so sey in der einen Ebene BG auf BC, und in der andern BH auf BD senkrecht. Folglich wären BG, BH zugleich auf MN senkrecht, §. 2. gegen §. 20.

§. 31. Zusatz 1. Sind zwey Ebenen AB, BD Fig. 90. gegen einander geneigt: so sind sie auf der Ebene ihres Neigungswinkels FEG, und diese

diese auf jenen senkrecht, weil der gemeinschaftliche Durchschnitt BC auf der Ebene des Neigungswinkels FEG senkrecht ist. §. 4. 14.

§. 32. Zusatz 2. Haben zwey Ebenen AB, HK, Fig. 90. gegen zwey andere BD, KM, ähnliche Neigungen; so passen solche Ebenen in einander.

Denn legt man N an E, und KL längst BC: so fällt NQ längst EG, weil LNQ = CEG = R; §. 4. auch fallen die Ebenen PNQ, FEG in einander, weil sie beyde senkrecht, §. 31. und die Neigungswinkel PNQ, FEG decken einander, weil sie gleich sind. §. 5.

§. 33. Zusatz 3. Zwey parallele Ebenen AB, CD Fig. 101. haben gegen eine dritte Ebene BE ähnliche Neigungen. Denn ihre Durchschnitte mit der dritten BF, DE sind parallel. §. 13. Auf diese sey GH senkrecht, und durch diese eine Ebene senkrecht auf BE gestellt, welche die parallelen Ebenen AB, CD in den parallelen Linien LG, MH schneidet; §. 13. da denn MHK, LGH einander gleich, (Pl. §. 86.) und die Neigungswinkel der parallelen Ebenen AB, CD gegen die dritte BE sind. §. 31.

§. 34. Zusatz 4. Zwey Ebenen AB, CD Fig. 101. die gegen eine dritte BE, die sie in parallelen Linien BF, DE schneiden, ähnliche Neigungen haben, sind parallel.

Denn es sey wiederum GH senkrecht auf BF, DE, und in der Ebene AB die GL auf BF senkrecht; da denn LGH der Ebene AB Neigung,

§. 4. auf welcher BG senkrecht ist. §. 31. Diese Ebene LGH schneide die Ebene CD in HM: so ist auch DH auf HM, HK senkrecht. §. 16. Folglich MHK der Ebene CD Neigung. §. 4. Nun ist angenommen MHK = LGH. Folglich sind MH, LG parallel. (Pl. §. 81.) Nun ist auch angenommen BG, DH parallel. Folglich sind die Ebenen durch LGB, MHD, das ist, die Ebenen AB, CD parallel. §. 27.

§. 35. Zusatz 5. Parallele Linien LG, MH Fig. 101. haben gegen einerley Ebene BE ähnliche Neigungen. Denn sind LN, MK auf die Ebene senkrecht, also auch parallel: §. 16. so ist GLN = HMK. §. 18. Zieht man nun GN, HK: so sind auch die Winkel bey N und K gleich, §. 1. folglich auch LGN, MHK, (Pl. §. 99.) oder der Linien LG, MH Neigungen gegen die Ebene BE. §. 3.

§. 36. Zusatz 6. Haben Linien LG, MH gegen einerley Ebene BE ähnliche Neigungen: so verhalten sie sich, wie die Perpendikel LN, MK; weil Δ LGN ∽ Δ MHK. (Pl. §. 214.)

Der 4te Lehrsatz. Fig. 100.

20. §. 37. Von drey ebenen Winkeln BAC, CAD, DAB, die eine Ecke A machen, sind jede zwey zusammen größer, als der dritte.
21. Und alle ebene Winkel, die eine Ecke A machen, sind zusammen kleiner, als vier rechte Winkel.

Beweis.

Beweis. 1) Sind gedachte drey Winkel einander gleich: so ist der Satz für sich klar. Sind sie aber ungleich: so sey BAC der größte. Macht man nun BAE = BAD, zieht BC, macht AD = AE, und zieht BD, DC: so ist BE = BD. (Pl. §. 47.) Nun ist BD + DC > BE + EC. (Pl. §. 72.) Folglich ist DC > EC. (Ar. §. 8.) Folglich DAC > CAE, (Pl. §. 78.) folglich BAD + DAC > BAC. (Ar. §. 6.)

2) Es sey die Ecke A wiederum von obgenannten drey ebenen Winkeln eingeschlossen, und beliebig BC, CD, DB gezogen: so entstehen noch drey Ecken, B, C, D, jede von drey ebenen Winkeln. Daher ist nach dem 1. Bew. CBA + ABD > DBC, BDA + ADC > CDB und DCA + ACB > BCD. Folglich sind die sechs erstgenannten Winkel größer, als die drey letztgenannten Winkel des Δ DBC, das ist, > 2 R. (Pl. §. 98.) Nun sind die sechs erstgenannten Winkel nebst den drey letztgenannten Winkeln, welche die Ecke A machen, sechs rechten Winkeln gleich. (Pl. §. 98.) Folglich sind gedachte drey Winkel, welche die Ecke A machen, < 4 R.

Auf ähnliche Art wird der Satz bewiesen, wenn mehr als drey ebene Winkel die Ecke A machen, folglich anstatt des Δ DBC ein Polygon entsteht.

Das

Das II. Capitel.

Von den Körpern.

(Eukl. Elem. 11. Buch.)

Erklärungen.

1. §. 38. Ein Körper heißt, was lang und breit und tief ist, und seine Gränzen sind Flächen. Oder:
2. Ein Körper ist ein Raum, der von einer oder mehrern Flächen allenthalben eingeschlossen ist.

13. §. 39. Ein Prisma Fig. 102. ist zwischen zwey congruenten und parallelen geradlinichten Figuren ABC, DEF, (die man Grundflächen nennt) und zwischen so viel Parallelogrammen, AE, BD, CF, (die Seitenflächen heißen) als die Grundfläche Seiten hat, enthalten. Oder: Ein Prisma wird von einer geradlinichten Figur ABC beschrieben, die sich so bewegt, daß einer ihrer Winkelpunkte A in einer geraden Linie AF, und die Ebene der Figur sich stets parallel bleibt.

Anmerk. Legt man durch einen Winkelpunkt A einer geradlinichten Figur ABC beliebig eine gerade Linie AF, die eine mit ABC parallele Ebene in F trift, und zieht durch die übrigen Winkelpunkte B, C mit AF die Linien BE, CD parallel, welche die parallele Ebene in E, D treffen: so giebt die Figur ein Prisma, weil obgedachte Linien unter sich parallel, §. 17. auch die Seiten der obern Figur FED den Seiten der untern ABC parallel, §. 13. folglich ihre Winkel gleich, §. 18. und die Seitenflächen Parallelogramme, (Pl. §. 24.) deren gegenüberliegende Seiten gleich sind. (Pl. §. 94.)

§. 40. Ein Prisma heißt, nach der Zahl der Seitenflächen, drey- vier- viel- seitig, oder eckig.

§. 41.

§. 41. Ein Prisma heißt **senkrecht**, wenn die Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht sind; **schief** aber, wenn dieses nicht ist.

Anmerk. Wenn man (§. 39. Anm.) die Linie AF auf die Ebene ABC senkrecht setzt: so entsteht daselbst ein senkrechtes Prisma. §. 30. 16. Daher sind die Seitenflächen eines senkrechten Prisma Rectangel. §. 1.

§. 42. Ein **Parallelepipedon** ist von lauter parallelen Flächen eingeschlossen. Oder: ist ein Prisma, dessen Grundflächen auch Parallelogramme sind, wie AF. Fig. 103.

Anmerk. Man kann hier jedes Paar gegenüberstehender Flächen als Grundflächen ansehen, entweder AC, FH, oder AE, FB; oder AG, FD.

§. 43. Ein Parallelepipedon heißt **rechtwinklicht**, wenn es senkrecht ist, und seine Grundflächen auch Rectangel sind. Oder: ist von sechs Rectangeln eingeschlossen.

§. 44. Ein **Würfel**, cubus, ist von sechs glei- 25.
chen Quadraten eingeschlossen.

§. 45. Eine **Pyramide** Fig. 104. ist zwischen 12.
einer geradlinichten Figur (der **Grundfläche**) ABCD, und zwischen so viel Triangeln (den **Seitenflächen**) KAB, KBC, KCD, KDA, als die Grundfläche Seiten hat, die alle in einem Punkte K über derselben (der **Spitze**) zusammentreffen, enthalten.

§. 46. Eine Pyramide heißt, nach der Zahl der Seitenflächen, **drey**, **vier**, **viel**, seitig, oder eckig.

§. 47. Die **Kanten** eines Körpers sind die Linien, worin jedes Paar der ihn einschließenden Flächen einander schneidet. Unter diesen sollen die,

welche

welche Schnitte zweyer Seitenflächen sind, Seitenlinien heißen, wie BK Fig. 104. Beym Würfel heißt jede Kante seine Seite.

9. §. 48. Aehnliche Körper heißen, die von gleich vielen in der Ordnung ähnlichen Ebenen eingeschlossen sind, und deren Seitenflächen gegen einander und gegen die Grundflächen ähnliche Neigungen haben.

10. §. 49. Congruente Körper (die gleich und ähnlich sind) heißen, die von gleich vielen in der Ordnung congruenten Figuren eingeschlossen sind.

§. 50. Ein regulärer Körper heißt, der von lauter congruenten regulären Figuren einerley Art, die congruente Ecken machen, eingeschlossen ist. Jede andere heißt irregulär.

25. bis 29. Anmerk. Der regulären Körper sind, wegen §. 37, nur fünfe, wovon der Cubus oder das Hexaëder von 6 Quadraten; das Tetraëder von 4 Triangeln; das Octaëder von 8 Triangeln; das Dodecaëder von 12 Pentagonen; und das Icosaëder von 20 Triangeln eingeschlossen ist.

§. 51. Ein Cylinder Fig. 105. ist von zwey gleichen und parallelen Kreisen (den Grundflächen), deren Mittelpunkte eine gerade Linie AB (die Axe) verbindet, und von einer krummen Fläche (der Seitenfläche) eingeschlossen, welche um die Umkreise beyder Grundflächen so geht, daß jede gerade Linie, wie CD, GH, die durch einen beliebigen Punkt in einem der beyden Umkreise mit der Axe AB parallel geht (die Seite des Cylinders), ganz in dieselbe fällt. Oder ein Cylinder wird beschrieben, wenn sich ein Kreis um B längst

der

der Linie CD so herab bewegt, daß seine Ebene sich stets parallel, und sein Halbmesser BC stets in der Ebene ABCD bleibt.

§. 52. Ein Cylinder heißt **senkrecht**, wenn die Axe AB auf den Grundflächen senkrecht steht; **schief** aber, wenn dies nicht ist.

Anmerk. Im senkrechten Cylinder ist ABCD ein 21.
Rectangel, welches den Cylinder beschreibt, wenn es sich
um seine unverrückte Seite AB ringsum dreht; da denn
AB die Axe ist, die gegenüberstehende Seite CD aber 22.
die krumme Seitenfläche, und die beyden übrigen Seiten 23.
AD, BC die Grundflächen beschreiben.

§. 53. Ein **Kegel**, conus, Fig. 106. ist zwischen einem Kreise (der **Grundfläche**) und zwischen einer krummen Fläche (der **Seitenfläche**) enthalten, die von einem über der Grundfläche befindlichen Punkte A (der **Spitze**) um die Peripherie der Grundfläche so gelegt wird, daß jede von der Spitze nach irgend einem Punkt der Peripherie gehende gerade Linie, wie AB, AD, (die **Seite des Kegels**) ganz in dieselbe fällt.

§. 54. Die Axe des Kegels AC ist die gerade Linie von der Spitze nach dem Mittelpunkt der Grundfläche.

§. 55. Ein Kegel heißt **senkrecht**, wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht; **schief** aber, wenn dies nicht ist.

Anmerk. Im senkrechten Kegel ist ACB ein recht-
winklichter Triangel, welcher den Kegel beschreibt, wenn 18.
er sich um seine unverrückte Cathete AC ringsum dreht; 19.
da denn AC die Axe ist, die andre Cathete CB aber die
Grundfläche, und die Hypotenuse AB die krumme Sei- 20.
tenfläche beschreibt.

§. 56.

24. §. 56. Kegel, wie auch Cylinder, sind **ähnlich**, wenn die Axe einerley Neigung gegen die Grundflächen, und einerley Verhältniß gegen die Durchmesser der Grundflächen haben.

§. 57. Die Höhe eines Körpers ist ein Perpendikel von oben nach der gegenüberstehenden Grundfläche.

Anmerk. Die Erklärung der Kugel, sphaera, wird der Sphärik, oder der Lehre von der Kugel, am Ende dieses Capitels vorbehalten.

Der 1ste Lehrsatz. Fig. 103.

24. §. 58. Ist ein Körper AF von lauter parallelen Flächen eingeschlossen, (ein Parallelepipedon,) so sind solches lauter Parallelogramme. Und ist ein Körper AF von lauter Parallelogrammen eingeschlossen: so ist er ein Parallelepipedon.

Beweis. 1) Da die Ebenen AC, FH, desgleichen AG, DF, parallel sind: so sind einer dritten Ebene AE Durchschnitte damit AD, EH, desgleichen AH, ED, parallel. §. 13. Folglich ist AE ein Parallelogramm. Eben so beweist man es von den übrigen Flächen.

2) Da AD mit BC, und DE mit CF parallel ist: so sind die Ebenen AE, BF parallel. §. 27. Eben so beweist man es von den übrigen Ebenen.

24. §. 59. Zusatz 1. In einem Parallelepipedon AF Fig. 103. sind jede zwey gegenüberstehende Flächen congruent. Denn zieht man BD, GE: so

so ist AB der GH, und AD der EH gleich und parallel, folglich BAD = GHE, §. 18. folglich $\triangle$ABD = $\triangle$GEH. (Pl. §. 47.) Folglich AC = FH. (Pl. §. 94.) Eben so beweist man es von den übrigen Flächen.

§. 60. Zusatz 2. Ein Parallelepipedon AF 28. Fig. 103. wird durch die Diagonalfläche BDEG halbirt. Denn es ist $\triangle$ ABD = $\triangle$ BDC, und $\triangle$EGH = $\triangle$ FEG, (Pl. §. 94.) auch AE = BF, und AG = DF; folglich Prisma ABDEGH = Prisma BDCFEG. §. 49.

§. 61. Zusatz 3. Ein dreyeckiges Prisma ABDEGH Fig. 103. ist die Hälfte eines Parallelepipedon AF von gleicher Höhe, und doppelter Grundfläche. §. 60.

§. 62. Zusatz 4. Wird ein Parallelepipedon 25. AK Fig. 103. von einer Ebene BF mit den gegenüberstehenden Flächen AE, KL parallel geschnitten: so verhalten sich die Abschnitte AF, BK, wie ihre Grundflächen AC, CL, oder wie ihre Seitenlinien AB, BL.

Denn theilt man AB in beliebig aliquote Theile, deren einen man auf BL trägt, er mag darin aufgehen, oder nicht; zieht durch die Theilpunkte Parallelen mit AD; und setzt auf sie Ebenen mit AE parallel: so sieht man aus §. 58. 59. leicht ein, daß AF und BK in so viel congruente Parallelepipeda getheilt sind, als die Grundflächen AC, CL Theile haben, und daß in BK ein kleinerer Rest bleibe, wenn in CL ein kleinerer Rest geblieben. Folg-

lich ist AF : BK = AC : CL (Pl. §. 202.) = AB : BL. (Pl. §. 208.)

§. 63. Zusatz 5. Parallelepipeda AF, AK Fig. 103. deren Grundflächen AE, LK congruent sind, und deren Seitenlinien, wie AB, LB, ähnliche Neigungen gegen die Grundflächen haben, verhalten sich wie diese Seitenlinien AB, LB, §. 62. folglich auch wie ihre Höhen, d. i. wie die Perpendikel von A und B auf die Grundflächen. §. 36.

Der 2te Lehrsatz. Fig. 107.

§. 64. Parallelepipeda auf einerley Grundfläche, und in gleicher Höhe, sind einander gleich, gleiches Inhalts.

Construction. Nimmt man für das Parallelepipedon AF die vordere Fläche ABCD zur Grundfläche an, (§. 42. Anm.) und verlängert die gegenüberstehende EHGF, (da folglich die unbegränzte Ebene HELM der Grundfläche ABCD parallel ist) so läßt sich auf derselben Grundfläche ABCD ein zweytes Parallelepipedon in gleicher Höhe auf zweyfache Art errichten.

1) Man ziehe durch D eine beliebige gerade Linie DK in der Ebene CDEF, welche die CF in einem Punkte P schneidet, und die verlängerte EF in einem Punkte K treffen muß. Zieht man nun durch die übrigen Winkelpunkte C, B, A, mit DK die CL, BM, AN parallel: so entsteht das Parallelepipedon AL auf einerley Grundfläche und in gleicher Höhe mit AF; so daß zwey Seitenflächen

des

des einen mit zwey Seitenflächen des andern in einerley Ebenen DL, AM, liegen, oder die Seitenlinien beyder Körper sich in einerley geraden Linien EL, HM, endigen.

2) Zieht man durch D eine beliebige gerade Linie DR außerhalb der Ebene CDEF, und mit ihr durch die übrigen Winkelpunkte der Grundfläche die CS, BT, AV, parallel, alle bis an die gegenüberstehende unbegränzte Ebene HELM: so entsteht das Parallelepipedon AS auf einerley Grundfläche und in gleicher Höhe mit AF; so daß die Seitenflächen des einen mit den Seitenflächen des andern nicht in einerley Ebenen liegen, oder die Seitenlinien beyder Körper sich in verschiedenen geraden Linien EF, HG; RS, VT endigen.

Beweis. 1) Daß die Parallelepipeda AF, AL, deren Seitenlinien sich in einerley geraden Linien endigen, gleich sind. 29.

Da EF = CD = KL: (Pl. §. 94.) so ist EK = FL. (Ar. §. 5.) Nun ist auch DE = CF, (Pl. §. 94.) und DEK = CFL. (Pl. §. 86.) Folglich ist △DEK = △CFL. (Pl. §. 47.) Eben so beweist man, daß △AHN = BGM. Nun ist auch EKNH = FLMG. (Pl. §. 106.) Desgleichen AE = BF, und AK = BL. §. 59. Folglich sind die Prismen DEKNHA, CFLMGB congruent, §. 49. und sollen das erste und zweyte heißen.

Verbindet man die Punkte P, Q, worin DK, AN die CF, BG schneiden, mit einer geraden Linie PQ, die in der Ebene BF liegt, also mit AD,

§. 13. folglich auch mit BC, FG §. 17. parallel ist: so entstehen zwey Prismata PFKNGQ, PCDABQ, die das dritte und vierte heißen sollen. Nimmt man nun das dritte Prisma vom ersten und zweyten hinweg, und fügt dem Reste das vierte bey: so hat man AF = AL. (Ar. §. 7. 5.)

Anmerk. Bey der Construction dieses ersten Falles ist es nicht nothwendig, daß DK die CF schneide, oder die EF erst verlängert treffe, sondern sie kann auch in F oder zwischen E und F gelegt werden; da denn der Beweis auf ähnliche Art, und noch leichter, zu führen ist.

30. 2) Daß die Parallelepipeda AF, AS, deren Seitenlinien sich nicht in einerley geraden Linien endigen, gleich sind.

Da RT mit EG in einerley Ebene: so werden EF, HG, verlängert die VR, TS, verlängert in K, L, N, M treffen, so daß KL in der Ebene EC, und NM in der Ebene AG, auch KL, NM, folglich auch KN, LM parallel und gleich sind, (Pl. §. 91.) jene mit DC, diese mit BC. Zieht man nun DK, CL; AN, BM: so entsteht ein drittes Parallelepipedon AL auf einerley Grundfläche und in gleicher Höhe mit den beyden ersten AF, AS; da denn nach dem ersten Falle AL = AS, weil die Seitenflächen BL, AK mit BS, AR in einerley Ebenen sind; und AL = AF, weil die Seitenflächen DL, AM mit DF, AG in einerley Ebenen sind. Folglich ist AF = AS. (Ar. §. 4.)

§. 65. Zusatz 1. Jedes schiefe Parallelepipedon AL oder AS Fig. 107. läßt sich in ein senkrechtes auf eben der Grundfläche und in gleicher Höhe verwandeln. Denn

Denn wenn man aus der Grundfläche Winkelpunkten A, B, C, D, Perpendikel AH, BG, CF, DE, auf die gegenüberstehende verlängerte Ebene ME fället: so erhält man ein senkrechtes Parallelepipedon AF, §. 41. welches dem schiefen AL oder AS gleich ist. §. 64.

§. 66. Zusatz 2. Jedes Parallelepipedon, das nicht rechtwinklicht ist, läßt sich in ein rechtwinklichtes von gleicher Grundfläche und Höhe verwandeln.

Denn es ist entweder senkrecht, oder kann in ein senkrechtes verwandelt werden. §. 65. Hat man nun ein senkrechtes, Fig. 108. dessen Grundfläche ABCD kein Rectangel ist: so mache man CK, BL senkrecht auf AD, und KM, LN senkrecht auf EH, und vollende das Parallelepipedon LF, dessen Grundfläche das Rectangel BCKL = ABCD, (Pl. §. 106.) und dessen Höhe KM = DE; da denn leicht erweislich, daß das Prisma ANGB = Prisma DMFC. Folglich ist, wenn man beyderseits den Zwischenkörper LNFC hinzuthut, AF = LF. Auch kann man BCFG als die gemeinschaftliche Grundfläche beyder Körper ansehen; da denn ihre Gleichheit aus §. 64. erhellet.

Der 3te Lehrsatz. Fig. 109.

§. 67. Parallelepipeda sind gleich, gleiches Inhalts, wenn bey gleicher Höhe ihre Grundflächen gleich, gleiches Inhalts, sind. 31.

Beweis. Da sich alle Parallelepipeda in rechtwinklichte verwandeln lassen: §. 66. so braucht der Satz nur von rechtwinklichten erwiesen zu werden.

Es seyn daher AK, EL zwey rechtwinklichte Parallelepipeda von gleichen Höhen CK, GL, und gleichen Grundflächen ABCD, EFGH.

Man verlängere EF nach M, und GF nach N, mache FM = AB, FN = BC, und vollende die Parallelepipeda NP, FQ: so sind nicht nur die Grundflächen AC, NM, (Pl. §. 106.) sondern auch die Parallelepipeda AK, NP congruent. §. 49. Nun ist EL : FQ = EG : FO §. 62. = NM : FO, (weil NM = AC = EG.) Und eben so NP : FQ = NM : FO. §. 62. Folglich ist EL : FQ = NP : FQ, (Ar. §. 150.) folglich EL = NP. (Pl. §. 204.) Nun war NP = AK. Folglich ist AK = EL. (Ar. §. 4.)

§. 68. Zusatz 1. Sind Parallelepipeda gleich: so haben sie, bey gleichen Grundflächen, auch gleiche Höhen; und, bey gleichen Höhen, auch gleiche Grundflächen. Denn wäre im ersten Falle die eine Höhe, im zweyten die eine Grundfläche größer: so ließe sich ein Stück von diesem Parallelepipedon abschneiden, das dem andern gleich wäre, und die Parallelepipeda wären also ungleich, gegen das Angenommene.

32. §. 69. Zusatz 2. Parallelepipeda AK, FQ Fig. 109. von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen AC, FO. Denn setzt man an FM ein Parallelogramm NM = AC, (Pl. §. 115.) und vollendet NP = AK: §. 67. so ist NP : FQ = NM : FO, §. 62. das ist, AK : FQ = AC : FO.

§. 70.

§. 70. Zusatz 3. Hätten die senkrechten Parallelepipeda AK, FQ Fig. 109. gleiche Grundflächen AR, FP: so verhielten sie sich, wie ihre Höhen AD, FG; wie leicht erhellet, wenn man FS = AD macht, und durch S eine Ebene mit FP parallel legt. §. 28.

Der 4te Lehrsatz. Fig. 104.

§. 71. Wird eine Pyramide KABCD mit einer Ebene der Grundfläche parallel geschnitten: so ist der Schnitt EFGH der Grundfläche ähnlich.

Beweis. In jeder Seitenfläche der Pyramide, wie KAB, ist die Seite des Durchschnitts EF mit der Seite der Grundfläche AB parallel, §. 13. folglich jeder Winkel des Durchschnitts, wie EFG, dem ähnlich liegenden Winkel der Grundfläche ABC gleich, (§. 18.) und deren Schenkel proportionirt, weil KF : KB = EF : AB = FG : BC. (Pl. §. 211.) Demnach ist der Schnitt der Grundfläche ähnlich. (Pl. §. 205.)

§. 72. Zusatz 1. Wegen dieser Aehnlichkeit ist EFGH : ABCD = EFq : ABq (Pl. §. 231.) = KEq : KAq. (Pl. §. 211.) Ist nun KM auf ABCD, folglich auch auf EFGH senkrecht, §. 29. und man zieht NE, MA: so ist KNE = KMA = R, §. 1. folglich NE mit MA parallel, (Pl. §. 81.) und KN : KM = KE : KA. (Pl. §. 211.) Demnach ist auch EFGH : ABCD = KNq : KMq, das ist, die parallelen Durchschnitte der Pyramide verhalten

 sich

sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

§. 73. Zusatz 2. Vergleicht man das Pyramidenstück MN Fig. 110. zwischen den mit der Grundfläche parallelen Schnitten M und N, mit einem Prisma von gleicher Höhe, welches M oder N zur Grundfläche hat: so ist offenbar das Pyramidenstück kleiner als das erste, und grösser als das zweyte Prisma, auch von beyden weniger unterschieden, als sie selbst oder ihre Grundflächen M, N, von einander unterschieden sind. Nun kann man den Unterschied zwischen M und N, je näher man sie an einander bringt, ohne Ende immer kleiner und kleiner machen, bis er zuletzt verschwindet; da denn gewiß das Prisma der kleinsten Höhe auf M oder auf N dem Pyramidenstücke derselben Höhe gleich ist. (vergl. Pl. §. 195. Ar. §. 129.)

§. 74. Zusatz 3. Geht ein Kreis um M Fig. 104. wo der Perpendikel KM die Grundfläche trift, durch alle Winkelpunkte der Grundfläche: so sind alle Seitenlinien der Pyramide einander gleich; weil KMA = R, folglich das Quadrat einer jeden Seitenlinie = KMq + MAq. (Pl. §. 117.) Eine solche Pyramide, deren Seitenflächen lauter gleichschenklichte Triangel sind, könnte **gleichseitig**, jede andere **ungleichseitig** heißen.

Sind nun auch noch die Seiten der Grundfläche gleich, also ABCD eine reguläre Figur im Kreise: so haben die gleichschenklichten Triangel auch gleiche Grundlinien, und die Pyramide hat also lauter

congruente

congruente Seitenflächen, (Pl. §. 53.) deren Höhen KR, KS rc. auch gleich seyn müssen. (Pl. §. 108.)

§. 75. Zusatz 4. Haben alle Seitenflächen der Pyramide Fig. 104. gegen die Grundfläche ähnliche Neigungen: so haben sie alle einerley Höhe KR, KS rc. und M ist der Mittelpunkt, MR der Halbmesser eines Kreises, der alle Seiten der Grundfläche berührt.

Denn da KM auf der Grundfläche, und KR, KS rc. auf der Grundfläche Seiten senkrecht: so sind KRM, KSM rc. die Neigungswinkel. §. 4. Da nun diese gleich sind: so sind auch die Winkel RKM, SKM rc. gleich, (Pl. §. 99.) und die Triangel MRK, MSK congruent. (Pl. §. 80.) Daher der Schluß des Zusatzes.

Der 5te Lehrsatz. Fig. 110.

§. 76. Dreyeckige Pyramiden ABCD, (12, 5.) EFGH, sind gleich, gleiches Inhalts, wenn bey gleichen Höhen ihre Grundflächen BCD, FGH, gleich, gleiches Inhalts, sind.

Beweis. Macht man durch beyde Pyramiden Durchschnitte in gleichen Höhen, wie M, P, oder N, Q: so sind diese einander gleich, weil die Grundflächen gleich sind. §. 72. Hiedurch kann man beyde in eine gleiche Anzahl Pyramidenstücke theilen. Wäre nun jedes Paar solcher Pyramidenstücke gleich: so müßten auch die Pyramiden, die daraus zusammengesetzt sind, gleich seyn. Um ersteres zu beweisen, nehme man ein zusammengehöriges

ziges Paar solcher Pyramidenstücke MN, PQ von beliebig kleiner Höhe: so kann man sich nach §. 73. statt ihrer ein Paar dreyeckige Prismen von gleicher Höhe gedenken, deren Grundflächen die gleichen Schnitte M, P, oder N, Q, sind. Da nun diese Prismen gleich sind: §. 67. 61. so sind auch obgedachte Pyramidenstücke gleich.

§. 77. Anmerk. Dieser Beweis ist für Pyramiden mit congruenten Grundflächen, auch für viereckige Pyramiden, derselbige. Der folgende Lehrsatz erfordert blos die Gleichheit dreyeckiger Pyramiden mit congruenten Grundflächen. Auch läßt sich von den dreyeckigen Pyramiden leicht der Schluß auf alle machen.

Der 6ste Lehrsatz. Fig. 111.

(12,7.) §. 78. Jedes dreyeckige Prisma ABC DEF läßt sich in drey gleiche dreyeckige Pyramiden theilen.

Beweis. Zieht man die Diagonalen der Seitenflächen AF, CE, CF, und schneidet das Prisma durch ECF, ACF: so erhält man drey Pyramiden, ABFC, AEFC, DECF; da denn nach §. 76. die beyden ersten gleich sind, weil sie, bey gemeinschaftlicher Spitze C, gleiche Grundflächen ABF, AEF haben. Nun ist die zweyte AEFC, oder, welches einerley, AECF; auch der dritten DECF gleich, weil bey gemeinschaftlicher Spitze F ihre Grundflächen AEC, DEC gleich sind. Folglich ist auch die erste der dritten, und also alle drey Pyramiden einander gleich.

§. 79. Zusatz. Jede dreyeckige Pyramide AB CF ist der dritte Theil eines Prisma von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche.

Der

Der 7te Lehrsatz. Fig. 105.

§. 80. Jeder Schnitt eines Cylinders mit einer Ebene FL, der Grundfläche DK parallel, ist ein der Grundfläche gleicher Kreis, und sein Mittelpunkt E in der Axe AB.

Beweis. Da jede Seite des Cylinders, wie CD, der Axe AB parallel ist: §. 51. so schneidet die Ebene durch AB, CD, die parallelen Ebenen des Durchschnitts und der Grundfläche in den parallelen Linien AD, EF, §. 13. die also gleich sind. (Pl. §. 88.) Folglich ist F im Umfange eines Kreises, der E zum Mittelpunkte, und EF = AD zum Halbmesser hat.

§. 81. Zusatz. Jeder Schnitt CK durch die Axe des Cylinders AB, ist ein Parallelogramm, und, wenn der Cylinder senkrecht ist, ein Rectangel.

Der 8te Lehrsatz. Fig. 106.

§. 82. Jeder Schnitt eines Kegels mit einer Ebene FH, parallel mit der Grundfläche BK, (folglich senkrecht auf die Axe §. 29.) ist ein Kreis, und sein Mittelpunkt E in der Axe AC.

Beweis. Die Ebenen ACB, ACD rc. schneiden die parallelen Ebenen des Durchschnitts und der Grundfläche in den parallelen Linien CB, EF, und CD, EG, §. 13. daher AC : AE = CB : EF = CD : EG. (Pl. §. 211.) Nun ist CB = CD. Folglich ist auch EF = EG rc. Demnach sind F, G, rc. im Umfange eines Kreises, der E zum Mittelpunkte, und EF zum Halbmesser hat.

§. 83.

§. 83. Zusatz. Der Schnitt des Kegels FH verhält sich zur Grundfläche BK wie EF q : CB q, (Pl. §. 264. Zus.) folglich auch wie AE q : AC q, oder, wenn ANM die Höhe des Kegels ist, wie AN q : AM q.

§. 84. Anmerk. Außer dem mit der Grundfläche parallel geführten, §. 82. folglich auf die Axe senkrechten §. 29. Schnitte des Kegels, giebt es noch andre Schnitte, die hier nicht ganz unerwähnt bleiben dürfen.

1) Jeder Schnitt des Kegels AKB, Fig. 106. durch die Axe AC ist ein Triangel, und, wenn der Kegel senkrecht ist, ein gleichschenklichter Triangel, weil alsdenn AB q = AC q + CB q. Ein solcher Kegel heißt gleichseitig, jeder andre ungleichseitig.

2) Besonders aber sind noch drey Schnitte des senkrechten Kegels merkwürdig, die jedoch hier nur historisch angezeigt werden können. Es sey nämlich Fig. 81. CAB ein Schnitt des senkrechten Kegels durch die Axe CD, und in der Ebene dieses Schnitts, durch einen beliebigen Punkt F der einen Seite BC, eine gerade Linie FL mit BA parallel gezogen: so macht solche, wenn sie sich um F herabwärts dreht, mit FB einen Winkel, der entweder > oder = oder < ACB ist. Für den ersten Fall ist FG, die mit CA auf dieser Seite zusammentrift, weil GFB > ACB ist; für den zweyten ist FH, die mit CA parallel läuft, weil HFB = ACB ist; für den dritten ist FK, die, wenn man AC, BC rückwärts verlängert, wo sie einen zweyten dem vorigen gleichen Kegel bilden, mit CA auf der entgegengesetzten Seite zusammentrift, weil KFB < ACB ist.

Nun heißt ein Schnitt dieses Kegels, mittelst einer Ebene senkrecht auf der Ebene ACB, durch FG, eine Ellipse, deren Axe FG ist; durch FH, eine Parabel, deren Axe FH ist; durch FK, eine Hyperbel, deren Axe, wenn man FK rückwärts verlängert, daß sie die verlängerte AC schneidet, der Theil von F bis zu solchem Durchschnitt ist. Die Linien, welche diese Schnitte auf des Kegels Seitenfläche machen, heißen hiernach: die

elliptische,

elliptische, parabolische oder hyperbolische Linie; und der Punkt, worin sie die Axe schneiden, ihr Scheitel.

3) Um sich die Begriffe von den Kegelschnitten mehr zu versinnlichen, bediene man sich senkrechter Kegel von Holz, die nach den beschriebenen fünf Richtungen CD, FL, FG, FH, FK, durchgeschnitten sind; oder verzeichne sich diese Linien, auch außer dem Kegel, auf jeder Ebene, mittelst Vorrichtungen, die man in Wolfii elementis analyseos finitorum §. 401. 435. 471. finden kann. Diese Vorrichtungen gründen sich auf gewisse Eigenschaften solcher krummen Linien, die als Erklärungen derselben dienen können, und daher noch anzuführen sind.

4) Die Ellipse ist von einer in sich selbst zurücklaufenden Linie eingeschlossen, so daß die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes dieser Linie von zwey innerhalb der Figur befindlichen Punkten, welche die Brennpunkte, foci, der Ellipse heißen, ihrer Axe gleich ist.

5) Die Parabel ist zwischen einer krummen Linie enthalten, die mit ihren Schenkeln zu beyden Seiten der Axe über alle Gränzen ohne Ende fortläuft, so daß jeder Punkt dieser Linie von einem innerhalb befindlichen Punkte, welcher der Brennpunkt, focus, der Parabel heißt, so weit absteht, als der Abstand eines von solchem Punkte auf die Axe gefällten Perpendikels vom Scheitel, und der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel zusammen betragen.

6) Die Hyperbel ist zwischen vier krummen Schenkeln, die gleichfalls ohne Ende fortlaufen, enthalten, so daß die Differenz der Entfernungen eines jeden Punkts der krummen Linie von zwey innerhalb befindlichen Punkten, welche die Brennpunkte, foci, der Hyperbel heißen, ihrer Axe gleich ist.

Erklärung.

§. 85. Eine Kugel, sphaera, Fig. 116. wird beschrieben, wenn sich ein halber Kreis AMB um seinen unverrückten Durchmesser AB

AB ringsumdreht; da denn die Kugel mit ihm einerley Mittelpunkt, Halbmesser und Durchmesser hat, und der Umkreis AMB die Kugelfläche beschreibt, die vom Mittelpunkte der Kugel allenthalben gleichweit absteht. (Eukl. 14. Erkl.)

§. 86. Zusatz 1. Der Quadrant ACM Fig. 116. beschreibt die halbe Kugel.

§. 87. Zusatz 2. Eine gerade Linie AB Fig. 115. die zwey Punkte der Kugelfläche A und B verbindet, fällt ganz innerhalb der Kugel, und schneidet verlängert die Kugel nur in diesen zwey Punkten.

Denn legt man durch AB und der Kugel Mittelpunkt C eine Ebene, zieht darin CA, CB und CD auf AB senkrecht: so ist (Pl. §. 73. 74.) jede gerade Linie von C nach einem Punkte zwischen A und B $<$ CA, nach einem jenseitigen Punkte aber $>$ CA, das ist, jene fällt innerhalb, diese geht außerhalb der Kugel.

§. 88. Zusatz 3. Schneidet eine Ebene MN Fig. 115. den Halbmesser der Kugel CE in seinem Endpunkte E senkrecht: so steht jeder andre Punkt der Ebene F vom Mittelpunkte C weiter als E ab, und ist also außerhalb der Kugel. Eine solche Ebene berührt daher die Kugelfläche, und zwar nur in einem Punkte.

Denn zieht man EF, und legt durch EF und C eine Ebene: so ist CEF = R, folglich CF $>$ CE.

§. 89. Zusatz 4. Berührt eine Ebene MN Fig. 115. die Kugel in E: so ist die gerade Linie CE,

CE, vom Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte, auf dieser Ebene senkrecht; und ein Perpendikel auf der Ebene im Berührungspunkte E geht durch der Kugel Mittelpunkt C.

Denn 1) wäre CE nicht senkrecht auf der Ebene: so sey es eine andere CF. Zieht man nun EF: so wäre CFE = R, folglich CE < CF. §. 88.

2) Wäre ein Perpendikel EG, der nicht den Mittelpunkt C träfe, und man zieht CE: so wäre auch diese ein Perpendikel, nach dem ersten Beweis, gegen §. 20.

Der 9te Lehrsatz. Fig. 116.

§. 90. **Wird eine Kugel mit einer Ebene beliebig geschnitten: so ist der Schnitt allemal ein Kreis, dessen Mittelpunkt in dem auf ihm senkrechten Durchmesser der Kugel ist, und heißt ein Kugelkreis.**

Beweis. 1) Geht der Schnitt LNM durch der Kugel Mittelpunkt C: so sind alle gerade Linien in seiner Ebene von C nach seinem Umfange, wie CL, CN rc. Halbmesser der Kugel, folglich einander gleich. Folglich ist der Schnitt ein Kugelkreis, der mit der Kugel einerley Mittelpunkt und Halbmesser hat.

2) Geht der Schnitt DGE nicht durch der Kugel Mittelpunkt C: so falle von C auf seine Ebene der Perpendikel CF. Zieht man nun nach einem beliebigen Punkte G in seinem Umfange CG und FG: so ist CFG = R, folglich FGq = CGq — CFq,

— CFq, unveränderlich. Folglich ist der Schnitt ein Kugelkreis, dessen Mittelpunkt F in CB ist.

§. 91. Zusatz 1. Die gerade Linie CF vom Mittelpunkt der Kugel nach dem Mittelpunkt des Kugelkreises ist auf seiner Ebene senkrecht; und ein Perpendikel FC auf der Ebene des Kugelkreises in seinem Mittelpunkte F, geht durch der Kugel Mittelpunkt C.

Denn 1) wäre CF nicht senkrecht: so träfe ein Perpendikel von C auf der Ebene des Kugelkreises nicht seinen Mittelpunkt F, gegen §. 90.

2) Gienge der Perpendikel auf der Ebene des Kugelkreises in seinem Mittelpunkte F, nicht durch der Kugel Mittelpunkt C, und man zieht CF: so wäre diese nach dem 1. Bew. auch ein Perpendikel, gegen §. 20.

§. 92. Zusatz 2. Zwey Kugelkreise DE, PQ sind gleich oder ungleich, je nachdem ihr Abstand vom Mittelpunkte der Kugel CF, CR gleich oder ungleich ist. Und zwar giebt der größere Abstand einen kleinern Kreis.

Denn FGq = CGq — CFq, und RSq = CSq — CRq. Nun ist CGq = CSq. Folglich sind FG und RS gleich, oder ungleich, je nachdem CF und CR gleich oder ungleich sind; da denn auch FG < RS, wenn CF > CR ist.

§. 93. Zusatz 3. Gleiche Kugelkreise haben gleichen Abstand von der Kugel Mittelpunkte; von ungleichen Kreisen aber, ist des größern Abstand kleiner, des kleinern hingegen größer.

Denn

Denn $CF^q = CG^q - FG^q$, und $CR^q = CS^q - RS^q$, wo wiederum $CG^q = CS^q$. Folglich ist $CF = CR$, wenn $FG = RS$, und $CF > CR$, wenn $FG < RS$.

§. 94. Zusatz 4. Die Schnitte durch den Mittelpunkt der Kugel geben die größten Kugelkreise, die alle einander gleich sind, und deren jeder die Kugel halbirt.

Denn 1) Es sey jeder andre Schnitt DGE, und dessen Mittelpunkt F: so ist $CFG = R$, folglich $CG > FG$, wo CG der Halbmesser der Kugel, und des Schnitts durch ihren Mittelpunkt. §. 90.

2) Es sey LNM ein größter Kugelkreis, und man errichte auf seiner Ebene im Mittelpunkt C den Perpendikel CA, der folglich auch auf CM senkrecht ist: so ist ACM ein Quadrant, der die Halbkugel, so wie CM den größten Kreis beschreibt. §. 86.

§. 95. Zusatz 5. Jede zwey größte Kreise ALB, ANB müssen sich schneiden, und einander halbiren; und jede zwey Kugelkreise ALB, ANB, die einander halbiren, sind größte Kreise.

Denn 1) der Kugel Mittelpunkt C ist ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt, folglich in beyder Ebenen, die sich also schneiden.

2) Ihr Schnitt AB geht daher durch beyder Mittelpunkt C, und ist folglich beyder Durchmesser, der sie also halbirt.

3) Halbiren ALB, ANB einander: so geht der Schnitt AB durch beyder Mittelpunkt C, der

auch der Kugel Mittelpunkt seyn muß, als wodurch beyde Perpendikel auf ihren Ebenen in C gehen müssen. §. 91.

Der 10te Lehrsatz. Fig. 116.

§. 96. Errichtet man auf der Ebene eines Kugelkreises DGE in seinem Mittelpunkte F, einen Perpendikel FC: so trift derselbe verlängert zwey Punkte der Kugelfläche A, B, deren jeder vom Umfange des Kugelkreises allenthalben gleichweit absteht. Diese Punkte heißen die Pole, und die gerade Linie AB, die sie verbindet, die Axe des Kugelkreises.

Beweis. Im Umfange des Kugelkreises nehme man einen beliebigen Punkt G, ziehe AG, BG, FG: so ist AFG = R, und BFG = R, folglich AGq = AFq + FGq sowohl, als BGq = BFq + FGq unveränderlich.

§. 97. Anmerk. Die vier Punkte, nämlich die Mittelpunkte der Kugel C, und des Kugelkreises F, und seine beyden Pole A, B, sind allemal in dem auf der Ebene des Kugelkreises senkrechten Durchmesser der Kugel AB, wie die nächsten Zusätze umständlicher zeigen.

§. 98. Zusatz 1. Der Perpendikel AF von einem Pole des Kugelkreises A auf seine Ebene, trift seinen Mittelpunkt F; und die Linie AF von einem Pole des Kugelkreises A nach seinem Mittelpunkte F, ist auf seiner Ebene senkrecht.

Denn 1) da AFG = R; so ist FGq = AGq — AFq unveränderlich, folglich F der Mittelpunkt des Kreises.

2) Wäre

2) Wäre AF nicht senkrecht: so träfe ein Perpendikel von A auf die Ebene des Kugelkreises nicht seinen Mittelpunkt F, gegen den 1. Bew.

§. 99. Zusatz 2. Die gerade Linie (AB, oder AC) durch beyde Pole des Kugelkreises DGE, oder durch den einen Pol und der Kugel Mittelpunkt, ist auf der Ebene des Kugelkreises DGE in seinem Mittelpunkte F senkrecht.

Denn der Perpendikel von A auf den Kugelkreis trift seinen Mittelpunkt F, §. 98. folglich auch den Mittelpunkt der Kugel C, §. 91. und den andern Pol B. §. 96. Nun ist durch zwey Punkte A und B, oder A und C nur eine gerade Linie möglich. Folglich muß AB oder AC mit obgedachtem Perpendikel einerley seyn.

§. 100. Zusatz 3. Geht ein Kugelkreis ADB durch eines andern DGE Pole A, B: so steht er auf ihn senkrecht, und halbirt ihn, und ist ein größter Kreis.

Denn AB ist auf der Ebene DGE im Mittelpunkte F senkrecht, §. 99. und in der Ebene ADB; daher diese auf jener senkrecht ist, §. 30. und sie im Durchmesser DE schneidet, folglich halbirt; auch ein größter Kreis ist, weil in ihr der Kugel Mittelpunkt durch den AB geht. §. 99.

§. 101. Zusatz 4. Wenn ein Kugelkreis ADB einen andern DGE halbirt, und auf ihm senkrecht steht: so geht er durch des andern Pole, und ist folglich ein größter Kreis.

Denn halbirt jener diesen: so ist der Durchschnitt DE der Durchmesser dieses, und die Mitte

F sein Mittelpunkt. Ist nun jener auf diesen senkrecht, und man errichtet auf DE den Perpendikel FR: so ist dieser auch auf DGE im Mittelpunkte F senkrecht; §. 30. folglich in der verlängerten FR die Pole des zweyten Kreises A, B, §. 96. durch welche der erste Kreis geht, der daher ein größter ist. §. 100.

§. 102. Zusatz 5. Steht ein größter Kugelkreis ADB auf irgend einen Kugelkreis DGE senkrecht: so geht er durch seine Pole, und halbirt ihn.

Denn fällt vom Mittelpunkte des ersten C, der auch der Kugel Mittelpunkt ist, der Perpendikel CF auf den zweyten: so trift er den Mittelpunkt F, §. 91. und den Durchschnitt DE, §. 38. und verlängert, die Pole A, B. §. 96.

§. 103. Zusatz 6. Wenn ein größter Kugelkreis ADB einen nicht größten DGE halbirt: so geht er durch seine Pole, und steht also auf ihn senkrecht.

Denn der Durchschnitt DE ist ein Durchmesser, folglich seine Mitte F der Mittelpunkt des Kreises DGE. Folglich ist CF senkrecht auf DGE, §. 91. und trift verlängert seine Pole A, B. §. 96.

§. 104. Zusatz 7. Stehen zwey größte Kugelkreise auf einander senkrecht: so geht jeder durch des andern Pole. Und wenn von zwey größten Kugelkreisen der erste durch die Pole des zweyten geht: so geht auch der zweyte durch die Pole des ersten. §. 100. 102.

§. 105.

§. 105. Zusatz 8. Gehen durch die Pole A, B, irgend eines Kugelkreises DGE, größte Kreise ALB, ANB ꝛc.: so sind ihre Bogen zwischen solchem Kugelkreise, und jeden seiner Pole, einander gleich.

Denn die Sehnen AD, AG sind gleich, §. 96. folglich auch die Bogen. (Pl. §. 177.) Und eben so ist auch BD = BG.

§. 106. Anmerk. Ist DGE kein größter Kreis: so ist AG größer, und BG, kleiner als ein Quadrant. Setzt man aber anstatt DGE einen größten Kreis LNM: so sind alle Bogen AN, BN, AL, BL ꝛc. Quadranten.

Der 11te Lehrsatz. Fig. 116.

§. 107. Kugelkreise, deren Ebenen parallel liegen, und die daher auch Parallelkreise heissen, PSQ, DGE ꝛc. haben einerley Pole A, B. Und Kreise PSQ, DGE ꝛc. die einerley Pole A, B haben, sind Parallelkreise.

Beweis. 1) Der Perpendikel FC auf der Ebene des Kreises DGE, geht durch seine Pole und der Kugel Mittelpunkt, §. 97. und ist auf der parallelen Ebene PSQ auch senkrecht, §. 13. in ihrem Mittelpunkte R, §. 91. und geht folglich auch durch ihre Pole. §. 96. Dieser Perpendikel aber schneidet die Kugel nur in zwey Punkten A, B, §. 87. die also die Pole beyder, und so auch mehrerer Parallelkreise seyn müssen.

2) Da beyde einerley Pole A, B haben: so ist AB auf beyden senkrecht, §. 99. folglich beyde parallel. §. 26.

§. 108. Zusatz 1. Es giebt nur zwey gleiche Parallelkreise zu beyden Seiten des Mittelpunkts C.

Denn AB, welche die Pole beyder Kreise verbindet, ist auf beyden senkrecht durch C. §. 99. Ist nun CR = CF: so sind beyde gleich, §. 92. aber jeder dritte Parallelkreis hat einen andern Abstand, und kann ihnen also nicht gleich seyn. §. 92.

§. 109. Zusatz 2. Gehen zwey größte Kreise ALB, ANB durch die Pole mehrerer Parallelkreise PSQ, LNM, DGE: so schneiden sie von diesen ähnliche Bogen PS, LN, DG, ab.

Denn die Linie durch ihre Pole, AB, ist auf den Ebenen der Parallelkreise in ihren Mittelpunkten F, C, R, senkrecht. §. 99. Zieht man nun von da nach den Endpunkten der Bogen gerade Linien RP, RS; CL, CN; FD, FG: so machen sie mit AB rechte Winkel; §. 1. nämlich RS, CN, FG in der Ebene ANB, die folglich parallel sind. (Pl. §. 81.) Und so auch RP, CL, FD. Folglich sind die Winkel PRS, LCN, DFG gleich, §. 18. also ihre Bogen PS, LN, DG ähnlich; welches auch daraus erhellet, weil obgedachte Winkel die Neigung der Ebenen beyder Kreise ALB, ANB bestimmen. §. 4.

§. 110. Zusatz 3. Ist §. 109. LNM ein größter Kreis; folglich AL, AN, (als Maaße der rechten Winkel ACL, ACN) Quadranten: §. 106. so enthält die Neigung der größten Kreise ALB, ANB, die den sphärischen Winkel PAS, oder DBG, machen, so viel Grade des größten Kreises, als der Bogen LN hat.

§. 111.

§. 111. Anmerk. Ein sphärischer Winkel, PAS, den zwey größte Kugelkreise mit einander machen, ist von einem ebenen geradlinichten Winkel dadurch unterschieden, daß er auf der Oberfläche der Kugel von Kreisbogen eingeschlossen wird. Sein Maaß ist der von seinen Schenkeln abgeschnittene Bogen LN eines größten Kreises, der den Scheitelpunkt A zu seinem Pole hat; und man erhält dasselbe, wenn man auf jedem Schenkel einen Quadranten AL, AN nimmt, und durch die Endpunkte L, N, einen größten Kreis legt. Zugleich erhellet aus §. 110, daß sphärische Scheitelwinkel einander, und sphärische Nebenwinkel zusammen zwey rechten Winkeln gleich sind. Auch sieht man, daß drey Bogen größter Kreise einen sphärischen Triangel ALN bilden, und wie dieser von einem ebenen geradlinichten Triangel verschieden sey.

§. 112. Zusatz 4. Sind §. 110. AL, AN, Quadranten, folglich A, B, die Pole des Kreises LNM; oder sind A, B, die Pole des Kreises LNM, folglich AL, AN, Quadranten: so ist der größte Kreis durch LN auf beyden Quadranten senkrecht, und geht durch beyder Pole, weil er in der Ebene LCN, die auf AB senkrecht ist.

§. 113. Zusatz 5. Sind §. 112. T, t, die Pole von ALB, und V, v, die Pole von ANB: so ist LN + NT = 90° = NT + TV, folglich LN = TV, das ist, der kleinste Abstand der Pole TV ist der Neigung der beyden Kreise LN gleich.

Das III. Capitel.

Von der Ausmessung der Körper und ihrer Flächen.

Die 1ste Aufgabe. Fig. 103.

§. 114. Ein rechtwinklichtes Parallelepipedon AF auszumessen.

Auflös. Das Rectangel ABCD sey des Körpers Grundfläche, und der Perpendikel AH seine Höhe. Man messe seine drey Seiten AB, AD, AH, mit einerley Maaß (Pl. §. 246.) und finde z. E. AB = 5, AD = 3, AH = 4: so giebt das Product aus diesen Zahlen den körperlichen Inhalt des Parallelepipedon.

Beweis. Hat man einen Würfel, dessen Seite das angenommene Maaß ist: so lassen sich so viel solcher Würfel an AB und an AD setzen, als AB und AD Theile haben, und es giebt das Product aus den beyden Zahlen die Menge der Würfel in einer Schichte, die die Grundfläche ABCD deckt. Solcher Schichten aber können im Parallelepipedon so viel über einander seyn, als die Höhe AH Theile hat. Demnach giebt das gefundene Product, mit der Zahl der Theile in AH multiplicirt, die gesammte Menge der Würfel, die den körperlichen Raum des Parallelepipedon AF anfüllen.

§. 115. Anmerk. Der Kürze wegen wird, wie (Pl. §. 248.) gesagt, daß man Länge, Breite und Höhe, oder Grundfläche und Höhe, in einander multiplicire.

§. 116. Zusatz 1. Zur Ausmessung der Körper braucht man einen Würfel, cubus, das Cubikmaaß,

bikmaaß, welches eine Cubik-Ruthe, oder Fuß, oder Zoll, oder Linie u. s. w. heißt; je nachdem die Seite des Würfels 1° oder 1′ oder 1″ oder 1‴ u. s. w. lang ist.

§. 117. Zusatz 2. Hiernach sieht man leicht ein, daß nach der Decimal- oder Duodecimaleintheilung eine Cubikruthe 1000 oder 1728 Cubikfuß; ein Cubikfuß 1000 oder 1728 Cubikzoll; ein Cubikzoll 1000 oder 1728 Cubiklinien u. s. w. enthalte.

§. 118. Anmerk. 1. Beym Cubikmaaße hat die Decimaleintheilung gleiche Vortheile mit (Pl. §. 242. 251.). So ist z. E. 75° 394′ 638″ 526‴ = 75394638526‴ = 75,394638526° u. s. w. Bey der Duodecimaleintheilung ist die Reductionszahl 1728.

§. 119. Anmerk. 2. Bey Vergleichung des Decimal- und Duodecimalcubikmaaßes gilt (Pl. §. 243.). Nur ist hier, wenn die Ruthen gleich sind, 1000 Decimalfuß = 1728 Duodecimalfuß; und wenn die Fuße gleich sind, 1000 Decimalzoll = 1728 Duodecimalzoll.

§. 120. Anmerk. 3. Für die Cubikmaaße verschiedner Länder nimmt man die Cubus der Verhältnißzahlen in (Pl. §. 244.).

Die 2te Aufgabe.

§. 121. Einen jeden prismatischen Körper auszumessen.

Auflös. 1) Sey jedes Parallelepipedon AL Fig. 107. gegeben. Man nehme beliebig eine von seinen Flächen, BCLM zur Grundfläche an, und fälle auf sie von der gegenüberstehenden Fläche einen Perpendikel, als die Höhe. Der Inhalt der Grundfläche (Pl. §. 254.) mit der Höhe multiplicirt (alles nach einerley Maaß gemessen) giebt den ver-

langten Inhalt, weil AL einem rechtwinklichten Parallelepipedon von einerley Grundfläche und Höhe gleich ist, §. 64. dessen Inhalt auf die beschriebene Art gefunden wird. §. 114.

2) Sey ein dreyeckiges Prisma ADBGEH Fig. 103. gegeben. Den Inhalt der Grundfläche ADB (Pl. §. 254.) multiplicire man in die nach einerley Maaß gemessene Höhe. Denn dies giebt halb so viel, als wenn man die Grundfläche AB CD in eben die Höhe multiplicirt, also den Inhalt des Körpers AF gefunden hätte, von dem das Prisma die Hälfte ist. §. 61.

3) Sey ein vieleckiges Prisma, dessen Grundfläche ABCDE Fig. 112. ist, gegeben. Diese sowohl als die gegenüberstehende abcde theile man durch Diagonalen in ähnlich liegende Triangel: so läßt sich das vieleckige Prisma in so viel dreyeckige von gleicher Höhe theilen, als Triangel in der Grundfläche sind. Diese lassen sich einzeln ausrechnen, und geben zusammen das ganze vieleckige Prisma, welches man aber auch auf einmal findet, wenn man die Triangel zusammen, das ist, die ganze Grundfläche in die gemeinschaftliche Höhe multiplicirt.

4) Sey ein Cylinder Fig. 105. gegeben. In den Kreisen, die seine Grundflächen sind, beschreibe man eine reguläre Figur, wovon AB Fig. 81. eine Seite sey: so ist diese Figur die Grundfläche eines vieleckigen Prisma, das in dem Cylinder beschrieben ist, und dessen Unterschied von dem Cylinder Segmente des Cylinders sind, welche die

Kreis-

Kreissegmente, wie AEB, zu Grundflächen haben. Verdoppelt man nun die Seiten der regulären Figur: so entsteht ein zweytes Prisma von doppelt so viel Seitenflächen, dessen Unterschied von dem Cylinder Segmente des Cylinders sind, welche die Kreissegmente, wie AE, EB, zu Grundflächen haben; wodurch also, wie sich (vergl. Pl. §. 264.) leicht erweisen läßt, der Unterschied des ersten Prisma um mehr als die Hälfte vermindert worden ist. Fährt man daher mit obgedachter Verdoppelung der Seiten fort: so kömmt man auf einen Unterschied, der kleiner als jede gegebene Größe ist. (Pl. §. 195.) Demnach nähert sich das Prisma dem Cylinder ohne Ende, indem es sich zuletzt gänzlich verliert, und ihm völlig gleich wird. (Ar. §. 129.) Da denn das Product der Grundfläche in die Höhe den Inhalt des Prisma (Auflös. 3.), folglich auch den Inhalt des Cylinders giebt.

§. 122. Zusatz 1. Den Inhalt eines Würfels findet man, wenn man seine Seite cubirt.

§. 123. Zusatz 2. Die Grundfläche oder Höhe eines prismatischen Körpers findet man, wenn man seinen Inhalt, im ersten Falle mit der Höhe, im zweyten mit der Grundfläche dividirt.

§. 124. Zusatz 3. Die Seite eines Würfels findet man, wenn man aus seinem Inhalte die Cubikwurzel zieht.

§. 125. Zusatz 4. Zieht man aus dem Inhalte eines jeden prismatischen Körpers die Cubikwurzel: so findet man die Seite eines Würfels, cubus, von gleichem Inhalte; wodurch sich also

jeder prismatische Körper in einen Cubus verwandeln läßt. Daher heißt die Findung seines Inhalts die **Cubatur.** (vergl. Pl. §. 258.)

§. 126. Zusatz 5. Den körperlichen Inhalt einer **Röhre**, die man als einen ausgehöhlten Cylinder betrachten kann, findet man, wenn man den ganzen und den herausgenommenen Cylinder ausrechnet, und letztern vom erstern abzieht.

§. 127. Zusatz 6. Nach dem bisherigen sieht man leicht ein, daß die Proportionen §. 69. 70. von allen prismatischen Körpern gelten, daß sie sich bey gleichen Höhen, wie die Grundflächen, und bey gleichen Grundflächen wie die Höhen verhalten. Hierauf gründet sich die Verfertigung und der Gebrauch des **Visirstabes.** Ein Cylinder AD Fig. 113. halte ein gewisses Maaß einer Flüßigkeit, z. E. eine **Kanne.** Seinen Durchmesser AB trage man auf die Schenkel eines rechten Winkels HEF, daß EF = EG = AB; setze FG in EH, FH in EK u. s. w.: so ist EG, EH, EK rc. der Durchmesser eines Cylinders, der in der Höhe AC, 1, 2, 3 rc. Kannen hält; (weil die Cylinder von gleicher Höhe sich, wie ihre Grundflächen, folglich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, und FGq = FEq + EGq; FHq = FEq + EHq u. s. w.) Hat man also den Durchmesser eines Cylinders nach dem Visirstabe EK gemessen: so messe man seine Höhe mit dem Maaße AC; da denn das Product aus beyden Zahlen die Menge der Kannen giebt, die der Cylinder hält.

§. 128. Anmerk. Bey einem Fasse nimmt man an, daß es das Mittel zwischen zwey Cylindern von gleicher Höhe sey, von denen der kleinere den Durchmesser des Bodens, der größere die Spundtiefe zum Durchmesser habe. Genauere Bestimmung Fässer zu visiren giebt die Algebra.

Die 3te Aufgabe.

§. 129. Einen jeden pyramidalischen Körper auszumessen.

Auflös. 1) Es sey eine dreyeckige Pyramide ABCD Fig. 110. gegeben: so giebt das Product der Höhe in die Grundfläche BCD ein Prisma, §. 121. folglich $\frac{1}{3}$ davon die Pyramide. §. 79.

2) Sey eine vieleckige Pyramide Fig. 104. gegeben, und man theile die Grundfläche durch Diagonalen in Triangel: so läßt sich die vieleckige Pyramide in so viel dreyeckige theilen, als Triangel in der Grundfläche sind. Diese lassen sich einzeln berechnen, und geben zusammen die ganze Pyramide; welche man auch auf einmal findet, wenn man die Triangel zusammen, das ist, die ganze Grundfläche, in die gemeinschaftliche Höhe multiplicirt, und davon $\frac{1}{3}$ nimmt. §. 79.

3) Sey ein Kegel Fig. 106. gegeben. Verfährt man damit, wie (§. 121. Aufl. 4.), so nähert sich die Pyramide dem Kegel, in dem sie sich endlich verliert; da denn der Inhalt des Kegels gleichfalls $\frac{1}{3}$ des Products der Höhe in die Grundfläche ist.

§. 130. Zusatz 1. Die Grundfläche oder Höhe einer Pyramide und eines Kegels findet man, wenn

man den dreyfachen Inhalt im ersten Falle mit der Höhe, im zweyten mit der Grundfläche dividirt.

§. 131. Zusatz 2. Die Cubikwurzel aus dem Inhalte einer Pyramide oder eines Kegels giebt die Seite eines Würfels von gleichem Inhalte.

§. 132. Zusatz 3. Eine abgekürzte Pyramide Fig. 104. oder einen abgekürzten Kegel Fig. 106. (wenn die Höhe des ganzen und des abgeschnittenen Stücks gegeben ist) findet man, wenn man das Ganze und das abgeschnittene Stück ausrechnet, und dieses von jenem abzieht.

Die 4te Aufgabe.

§. 133. Die Seitenflächen prismatischer und pyramidalischer Körper auszumessen.

Auflös. 1) Sey ein beliebiges Prisma Ad Fig. 112. gegeben. Da die Seitenflächen Ab, Bc, lauter Parallelogramme sind, die man nach (Pl. §. 254.) ausrechnet: so geben diese zusammen die gesammte Seitenfläche des Prisma.

Oder: Macht man einen Schnitt FGHKL, senkrecht auf eine der gleichen und parallelen Seitenlinien Aa, der folglich auch auf allen übrigen Seitenlinien senkrecht ist: §. 16. so giebt das Product der Seitenlinie Aa in den Umring dieses Schnitts die gesammte Seitenfläche des Prisma; weil die Seiten des Schnitts die Höhen der Parallelogramme sind, die alle gleiche Grundlinien Aa haben.

Anmerk. Ist daher das Prisma senkrecht: so ist Aa seine Höhe, und obgedachter Schnitt der Grundfläche congruent. Folglich ist die gesammte Seitenfläche des senk-

senkrechten Prisma das Product seiner Höhe Aa in den Umring seiner Grundfläche ABCDE.

2) Sey ein senkrechter Cylinder gegeben, in welchen sich ein senkrechtes Prisma von unzähligen Seiten verliert: (§. 121, Aufl. 4.) so ist nach vorstehender Anmerkung, seine Seitenfläche das Product seiner Höhe in den Umkreis seiner Grundfläche.

3) Sey eine beliebige Pyramide KABCD Fig. 104. gegeben, deren Seitenflächen die Triangel KAB, KBC, KCD, KDA, welche man (Pl. §. 254.) besonders ausrechnen kann, die gesammte Seitenflächen geben.

Anmerk. 1. Ist die Pyramide wie §. 75. daß die Perpendikel, wie KR, alle einander gleich sind: so ist die gesammte Seitenfläche ein Product des halben Perpendikels KR in den Umring der Grundfläche.

2) Wird von einer solchen Pyramide das Stück KEFGH abgeschnitten: so sind die Seitenflächen der abgekürzten Pyramide Trapeze von gleichen Höhen, folglich ihre Summe das Product solcher Höhe in den Umfang eines parallelen Schnitts durch die Mitte der Seitenlinien. (vergl. Pl. §. 260.)

4) Sey ein senkrechter Kegel ABK Fig. 106. gegeben: so entsteht derselbe aus einer Pyramide wie §. 75, wenn man die Seiten ihrer Grundfläche immer kleiner und kleiner macht, bis sie sich zuletzt in den Umkreis verlieren; da denn der Perpendikel KR Fig. 104. die Seite des Kegels AD Fig. 106. wird; folglich ein Product aus der halben Seite AD in den Umkreis der Grundfläche die Seitenfläche des Kegels giebt.

Anmerk. Die Seitenfläche des abgekürzten Kegels Fig. 106. findet man, nach dem, was von der Pyramide gelehrt worden, wenn man DG in dem Umkreis eines

durch

durch die Mitte von DG parallel mit BK geführten Schnitts multiplicirt.

Der 1ste Lehrsatz. Fig. 114.

§. 134. Die Oberfläche einer Halbkugel ist der Seitenfläche eines Cylinders gleich, der den größten Kugelkreis zur Grundfläche, und den Halbmesser der Kugel zur Höhe hat.

Beweis. Es sey BCD ein Quadrant, und ABCD ein Quadrat, dessen Seite der Halbmesser CB. Beyde drehen sich um den unverrückten Perpendikel CB, und beschreiben, jener die Halbkugel, dieses den Cylinder. Zieht man EF, GH nahe bey einander, auf BC senkrecht: so beschreibt beym Umdrehen EG ein ganz kleines Stück der Cylinderfläche, und KL ein ganz kleines Stück der Kugelfläche. Jenes ist nach (§. 133. Aufl. 2.) das Product von EG in den Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser GH. Dieses kann, wenn man von der Tangente an N, die den Perpendikel CB verlängert in Q schneidet, einen Theil nimmt, der von dem kleinsten Bogen KL nicht zu unterscheiden ist, als die Seitenfläche eines abgekürzten Kegels angesehen werden, und ist also nach (§. 133. Aufl. 4. Anm.) das Product von KL in den Umfang eines Kreises, dessen Halbmessers NP durch die Mitte von KL mit FK parallel gezogen ist. Fället man nun von K auf LH den Perpendikel KM, und zieht CN: so ist $CNK = CNP + PNK = R = PNK + LKM$; folglich $CNP = LKM$; folglich $\triangle CNP \backsim \triangle LKM$, und KL:

KM

KM = NC : NP. (Pl. §. 214.) Aber KM = EG, und NC = GH. Folglich ist auch KL : EG = GH : NP, und, weil die Umringe der Kreise sich wie die Halbmesser verhalten, (Pl. §. 264. Zus.) auch KL : EG = Umkreis GH : Umkreis NP. Folglich, wenn man die Glieder in Zahlen ausdrückt, KL . Umkreis NP = EG . Umkreis GH, d. i. das kleine Stück der Kugelfläche ist dem kleinen Stück der Cylinderfläche gleich.

Denkt man sich nun die Oberfläche der Halbkugel und des Cylinders in lauter solche kleine Stücke getheilt, deren Anzahl beyderseits, bey dergleichen Höhe CB, gleich ist: so wird von jedem Paare die Gleichheit eben so bewiesen. Demnach ist die ganze Fläche der Halbkugel der ganzen Fläche des Cylinders gleich.

§. 135. Zusatz 1. Die Oberfläche der ganzen Kugel ist der Seitenfläche eines Cylinders gleich, der den größten Kugelkreis zur Grundfläche, und den Durchmesser der Kugel zur Höhe hat.

§. 136. Zusatz 2. Die Oberfläche der Kugel ist vier größten Kugelkreisen gleich. Denn die der Kugelfläche gleiche Cylinderfläche ist das Product des Durchmessers, in dem Umfang eines größten Kreises; und ein größter Kugelkreis das Product des halben Radius, oder des vierten Theils vom Durchmesser in den Umfang eines größten Kreises; daher jenes viermal größer, als dieses.

§. 137. Zusatz 3. Jedes Stück der Kugelfläche ist das Product der Höhe dieses Stücks in den Umfang eines größten Kugelkreises.

z. E. wenn man den Umfang eines größten Kreises mit BF = AE, oder mit CH = DG multiplicirt: so erhält man ein Stück der Kugelfläche, das im ersten Fall von BK, im zweyten von LD beschrieben wird.

Der 2te Lehrsatz.

§. 138. **Der Inhalt einer Kugel ist $\frac{2}{3}$ des Inhalts eines Cylinders, der einen größten Kugelkreis zur Grundfläche, und den Durchmesser der Kugel zur Höhe hat.**

Beweis. Stellt man sich vor, daß die ganze Kugelfläche in eine unzählige Menge kleinster Theile getheilt sey, die man als ebene Grundflächen von eben so vielen pyramidalischen Körpern, deren gemeinschaftliche Spitze der Kugel Mittelpunkt sey, ansehen könne: so ist offenbar der Inhalt der Kugel dem Inhalte aller dieser pyramidalischen Körper zusammen gleich. Letztern aber findet man, wenn man die Kugelfläche, das ist, vier größte Kugelkreise, mit $\frac{1}{3}$ des Halbmessers multiplicirt, (§. 129.) oder, welches einerley, wenn man einen größten Kugelkreis mit $\frac{2}{3}$ des Durchmessers multiplicirt, welches also $\frac{2}{3}$ vom Producte eines größten Kugelkreises in den Durchmesser, das ist, $\frac{2}{3}$ vom Inhalte des gedachten Cylinders giebt.

Der 3te Lehrsatz.

§. 139. **Aehnliche Körper verhalten sich wie die Würfel ähnlich liegender Linien in ihnen.**

Beweis. Da sich alle bisher betrachtete Körper auf Pyramiden zurückführen lassen; indem die Ku-

gel

gel mit dem Cylinder, dieser mit einem Prisma, und dieses, so wie der Kegel, mit einer Pyramide verglichen worden: so braucht der Satz nur von Pyramiden erwiesen zu werden. Es lassen sich aber alle ähnliche Pyramiden durch die beyden Pyramiden KEFGH, KABCD, Fig. 104. deren Höhen KN, KM sind, vorstellen, wo die kleinere ein Theil der größern ist, und beyder Grundfläche parallel sind; daher, was von dieser erwiesen werden wird, von allen ähnlichen Pyramiden gilt.

Nun ist (Pl. §. 231.) $EFGH : ABCD = KE^q : KA^q$ und $KN : KM = KE : KA$. Folglich ist, wenn man die Glieder in diesen Proportionen durch Zahlen ausdrückt, $EFGH . KN : ABCD . KM = KE^3 : KA^3$, (Ar. §. 173.) folglich auch nach (Ar. §. 157.) $\frac{EFGH . KN}{3} : \frac{ABCD . KM}{3} = KE^3 : KA^3 = KN^3 : KM^3$ u. s. w. wo das erste und zweyte Glied den Inhalt der beyden Pyramiden ausdrücken. §. 129.

§. 140. Anmerk. Die Seitenflächen dieser Pyramiden verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender Linien in ihnen; weil jedes zusammengehörige Paar der einzelnen Seitenflächen in der Verhältniß $AN^q : AM^q$ ist. (vergl. Pl. §. 231. und Ar. §. 169.)

Des ersten Cursus der reinen Mathematik Ende.

Verbes-

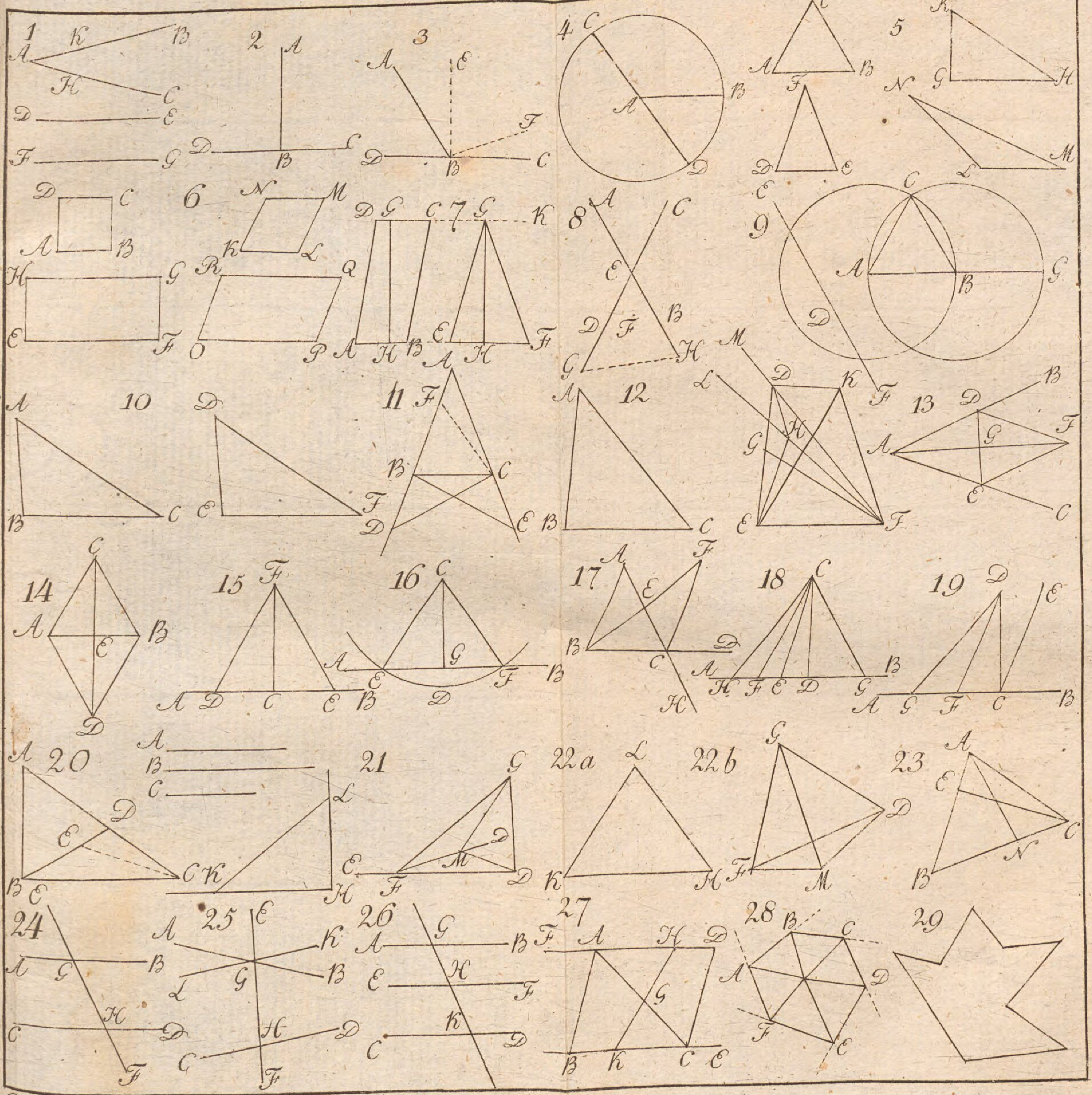
Bayerische Staatsbibliothek München

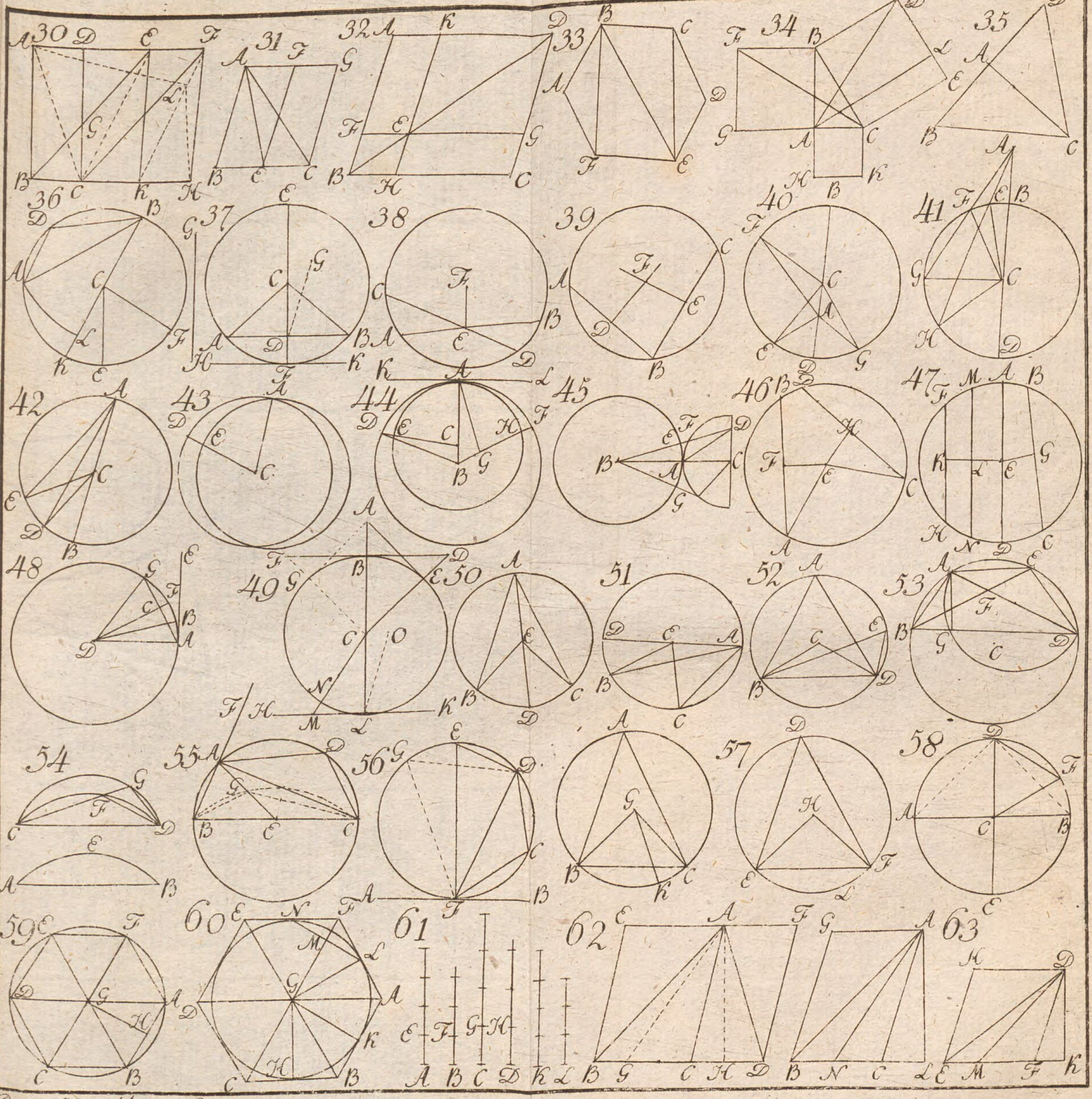
Verbesserungen.

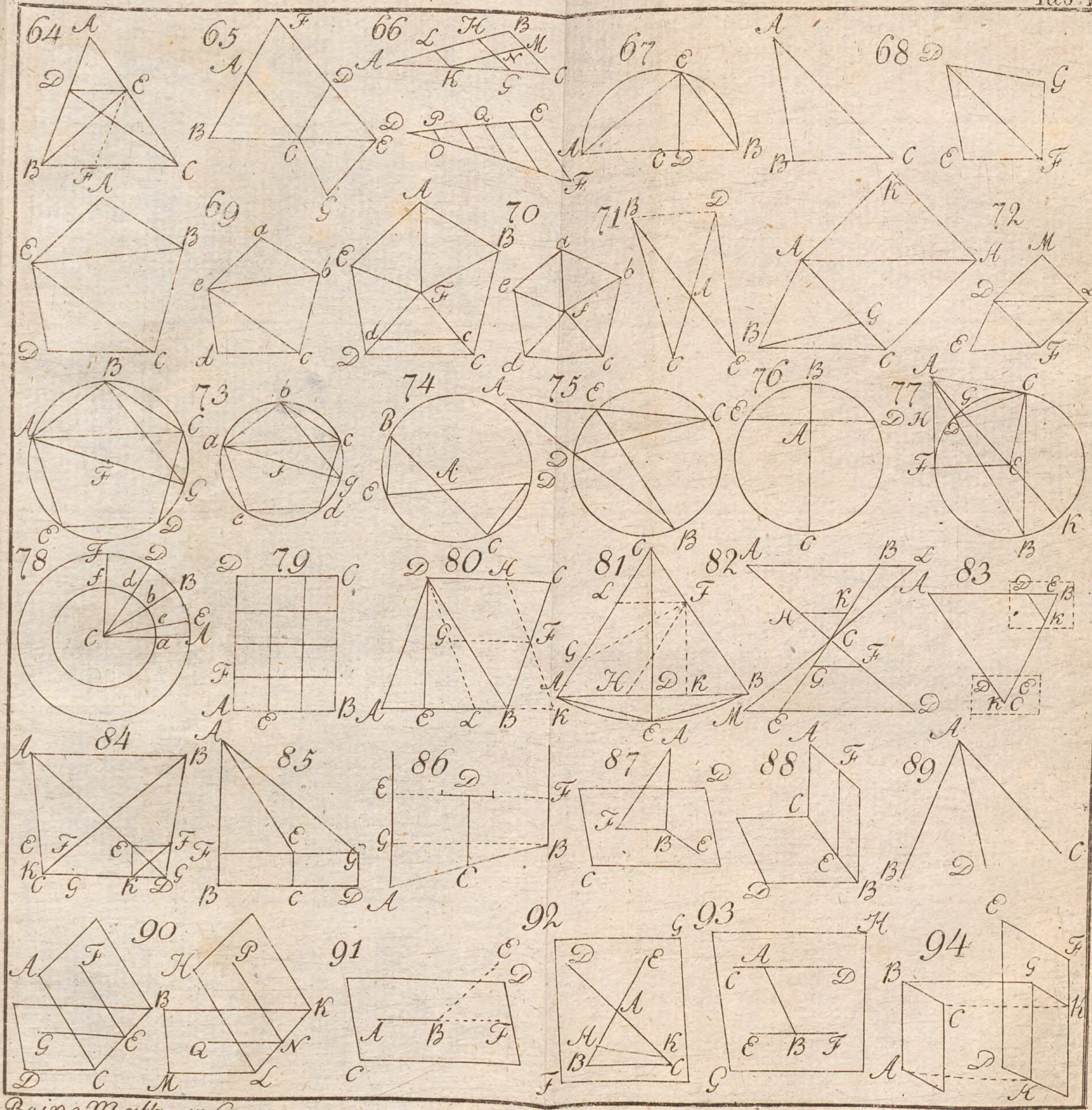
(S. 10. Z. 11. v. u.) vor f. von. (S. 17. Z. 9. v. u.) setze man ein Comma bey Divisors. (S. 22. Z. 14.) 2 : 3 f. 3 : 2. (S. 24. Z. 10.) läßt f. lassen. (S. 28. Z. 16.) muß es heißen: $\frac{9}{14} : 3 . 2 = \frac{9 : 3}{14 : 2}$. (S. 36. Z. 4. v. u.) soll heißen: genau genug. (S. 37. Z. 12.) $\frac{0,579}{3}$ f. $0, \frac{579}{3}$. (S. 40. Anmerk. 2. Z. 2.) muß §. 2. ausgestrichen werden. (S. 46. Z. 12. v. u.) Tausende f. Hunderte. (S. 56. Z. 5. v. u.) 1709 f. 2236. (S. 60. Z. 5. v. u.) §. 78. 84. für §. 78.; §. 131. f. §. 84. (S. 62. Z. 14. v. u.) Vordergliedern f. Hintergliedern. (S. 63. Z. 3. v. u.) 1 : 2 für 1 : 3. (S. 74.) das unterste Exempel gehört zu S. 75. 3te Auflös. (S. 76. Z. 5. 6. v. u.) rthl. f. pf. (S. 80. Z. 12.) 3 f. 300. (S. 82. Z. 13. 15. v. u.) gr. f. ggr. (S. 83. Z. 2. 8.) $\frac{1}{1}$ f. $\frac{1}{7}$; $\frac{14}{25}$ ℔ f. $\frac{14}{17}$ ℔. (S. 85. Z. 4. 5.) dem ihr zugehörigen f. ihrem. (S. 99. Z. 2. v. u.) Polygon f. Polygom. (S. 100. §. 23. Z. 7.) soll heißen: die schiefe Winkel, aber nur gegenüberstehende nicht lauter gleiche Seiten hat. (S. 103. Z. 3. v. u.) AB f. CB. (S. 113. Z. 8.) soll heißen: von einem Punkte E. (S. 117. Z. 2. v. u.) soll heißen: nehme man in CD. (S. 119. Z. 2. v. u.) ABCD f. AB, CD. (S. 143. Z. 16. v. u.) BFD f. AFD. (S. 151. Z. 1. v. u.) einen f. einem. (S. 167. Z. 5.) setze man ein Comma bey in. (S. 169. Z. 3.) die f. der. (S. 180. Z. 13. v. u.) 1 : 3, f. 1 : 3.

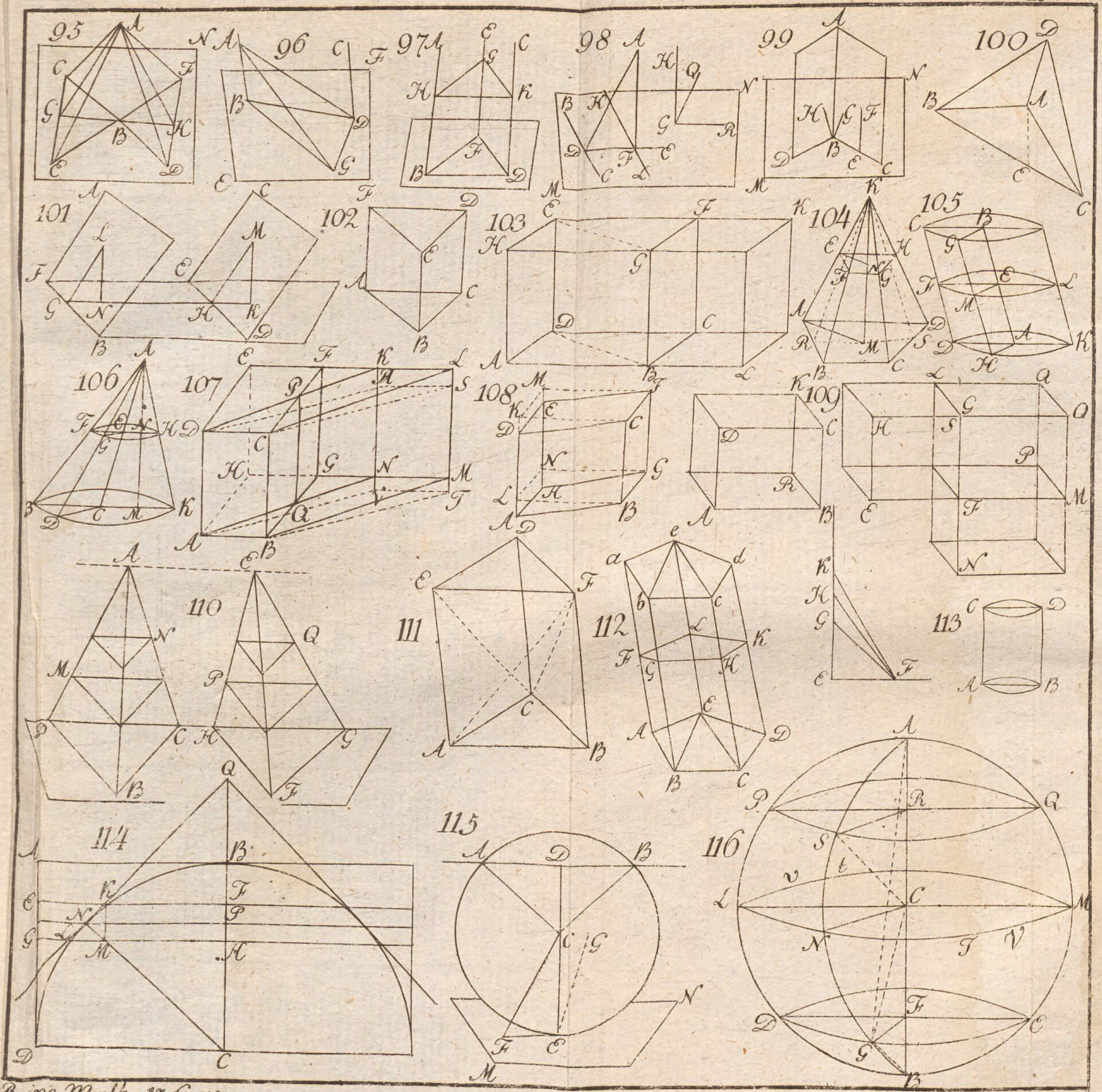
Anmerk. Um mit den Kupfertafeln möglichst zu spahren, sind einige Figuren bey mehrern §§. benutzt worden. Sollte dies zuweilen Ungeübtern Schwierigkeit machen: so läßt sich solche leicht heben, wenn man sich selbst eine Zeichnung den im §. angegebenen Bedingungen gemäß entwirft.

Bayerische Staatsbibliothek München


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22 a
22 b
23
24
25
26
27
28
29


30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63


64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94


95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116

4. Q.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lorenz, Johann Friedrich, 1738-1807

Grundriß der reinen und angewandten Mathematik oder der erste Cursus der gesamten Mathematik

Bd.: 1,1

Helmstädt 1791

Math.u. 113-1,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594103-7
VD18 80347010-001